

一、单项选择题

1. 以下关于 $f(x) = x \sin x$ 的命题正确的是 _____.X (A) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界, 且为 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大量.分析: 取 $x_n'' = 2n\pi \rightarrow +\infty$, $f(x_n'') = 2n\pi \sin 2n\pi = 0 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n'') = 0$ 取 $x_n' = (2n\pi + \frac{\pi}{2}) \rightarrow +\infty$, $f(x_n') = (2n\pi + \frac{\pi}{2})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n') = +\infty$.所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 不是无穷大.X (B) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 且为 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大量.✓ (C) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界, 且不是 $x \rightarrow \infty$ 时无穷大量.X (D) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 且不是 $x \rightarrow \infty$ 时无穷大量.

(选 C)

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^4 + bx^2 + cx \cos x}{d(\sqrt{4x^4 + 1} - 1) + k \ln(1 + 2x)} = 1$, $d, k \neq 0$, 则下列结论正确的是 _____.(A) $a = 2d$ (B) $b = 2d$ (C) $k = 2c$ (D) $c = 2k$.分析: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^4 + bx^2 + cx \cos x}{d(\sqrt{4x^4 + 1} - 1) + k \ln(1 + 2x)} = 1$ 得 $a = 0$.

$$\text{由左} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^4 + bx^2 + cx \cos x}{d(\sqrt{4x^4 + 1} - 1) + k \ln(1 + 2x)} = 1 \text{ 得 } a = 0.$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b + c \cdot \frac{\cos x}{x}}{4d \cdot \frac{x^2}{\sqrt{4x^4 + 1} + 1} + \frac{k \ln(1 + 2x)}{x^2}} = \frac{b}{2d} = 1 \therefore b = 2d.$$

(选 B)

3. $f(x)$ 在 x_0 处可导, $f'(x_0) = 0$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $df(x)|_{x=x_0}$ 是 _____.(A) 与 Δx 等价无穷小 (B) 与 Δx 同阶非等价无穷小(C) 比 Δx 低阶无穷小 (D) 比 Δx 高阶无穷小.分析: $dy|_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot \Delta x = 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy|_{x=x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0 \therefore \text{当 } \Delta x \rightarrow 0 \text{ 时, } dy|_{x=x_0} = o(\Delta x).$$

(选 D)

3. 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是

№2.

$F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的 _____.

(A) 充分必要条件. (B) 充分但非必要条件 (C) 必要但非充分条件.

(D) 既非必要又非充分条件.

解: $\Rightarrow$ 已知 $f(0) = 0$,
$$F(x) = \begin{cases} f(x)(1 + \sin x), & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ f(x)(1 - \sin x), & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)(1 + \sin x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{\sin x}{x} f(x) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} f(x) \\ &= f'(0) + f(0) = f'(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)(1 - \sin x) - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{\sin x}{x} f(x) \right) = f'(0) - f(0) = f'(0) \end{aligned}$$

$$\therefore F'_+(0) = F'_-(0) \quad \therefore F'(0) = f'(0).$$

$\Leftarrow$ 若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 有 $F'_+(0) = F'_-(0)$, $F(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

$$\cancel{F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)(1 + \sin x)}{x}}$$

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = F(0) = f(0)$$

$$\begin{aligned} F'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)(1 + \sin x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} + \frac{\sin x}{x} f(x) \right) = f'(0) + f(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)(1 - \sin x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{\sin x}{x} f(x) \right) = f'(0) - f(0) \end{aligned}$$

$$\text{由 } F'_+(0) = F'_-(0) \text{ 得 } f'(0) + f(0) = f'(0) - f(0) \therefore f(0) = 0.$$

综上: $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 点可导的充要条件. (选A)

4. $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x < 0 \\ \ln(1+x), & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点存在二阶导数, 则 ____ No3

- (A) $a = -\frac{1}{2}, b = -1, c = 0$ (B) $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = 1$ (C) $a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = 0$
(D) $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = 1$.

解: $f(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导, 所以有:

① $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \therefore c = 0$.

② $f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & x > 0 \\ f'(0) & x = 0 \end{cases}$ 有 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点连续:
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = f'(0)$
 $f'(0) = 1, b = 1$.

③ $f''(0)$ 存在, 有 $f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = -1$
 $f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(2ax + 1) - 1}{x} = 2a$
 $\therefore a = -\frac{1}{2}$. (选 C)

6. $f(x) \in C[0, 1]$, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(1) = 0$, 证明 $\exists \xi \in (0, 1)$, 使 $2023f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 时需构造的辅助函数为 ____.

- (A) $F(x) = f(x)x^{2023}$ (B) $F(x) = f(x)e^{-2023}$
(C) $F(x) = f(x)x^{2024}$ (D) $F(x) = f(x)x^{-2024}$

解: $2023f(x) + xf'(x) = 0 \Leftrightarrow 2023x^{2022}f(x) + x^{2023}f'(x) = 0$
 $\Leftrightarrow (x^{2023}f(x))' = 0$.

令 $F(x) = f(x)x^{2023}$, 有 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导,
 $F(0) = 0, F(1) = f(1) = 0$

由罗尔定理, $\exists \xi \in (0, 1)$, 使 $F'(\xi) = 0$,

即 $2023\xi^{2022}f(\xi) + \xi^{2023}f'(\xi) = 0, (0 < \xi < 1)$

$\therefore 2023f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 成立.

(选 A)

7. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim 2x \sim 3x \sim ax^n$ 为等价无穷小, 则 ____.

(A) $n=2, a=7$ (B) $n=3, a=6$ (C) $n=4, a=5$ (D) $n=5, a=4$.

解: $1 - \cos x \sim 2x \sim 3x \sim ax^n$

$$= 1 - (1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{1}{2}x^2, (x \rightarrow 0)$$

$\therefore n=2, a=\frac{1}{2}$. (选 A)

8. $f'(x)$ 连续, $f'(a)=0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{|x-a|} = 1$, 则 ____.

(A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点. (B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $(a, f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. (D) $x=a$ 不是极值点, $(a, f(a))$ 不是拐点.

解: $f'(a)=0 \Rightarrow x=a$ 是 $f(x)$ 的驻点.

由 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{|x-a|} = 1 > 0$, $f'(x)$ 连续得 $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = f'(a) = 0$.

由极限的保号性, 存在 $\delta > 0$, $f'(x) > 0$. $\therefore (a, f(a))$ 不是拐点.

$\therefore f'(x)$ 在 $U(a)$ 内单调递增.

$\therefore f(x)$ 在 $x=a$ 取极小值.

x	$(a-\delta, a)$	a	$(a, a+\delta)$
$f'(x)$	$\uparrow$	0	$\uparrow$
$f(x)$	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

或 $f'(x) - f'(a) = f''(\xi)(x-a)$, $f'(a)=0$, $f''(\xi) > 0$

$\therefore f'(x) = f''(\xi)(x-a) < 0, x > a$
 $ > 0, x < a$

(选 A)

9. 曲线 $y = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$, 则 ____.

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{(x+1)^2} = 0 \therefore y=0$ 是该曲线的一条水平渐近线.

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{(x+1)^2} = \infty \therefore x=-1$ 是该曲线的一条铅直渐近线.

(选 C). (C) $y=0$ 为水平渐近线, $x=-1$ 为铅直渐近线.

10. 在 $(-\infty, +\infty)$ 上方程 $2023 \arctan x - x = 0$ _____.

(A) 无实根 (B) 有且仅有一个实根 (C) 有且仅有两个实根 (D) 有且仅有三个实根.

解: $f(x) = 2023 \arctan x - x$, $f(x)$ 是奇函数, 其图像关于原点对称.

$f(0) = 0 \quad \therefore x = 0$ 是方程的一个根.

当 $x > 0$ 时, $f'(x) = \frac{2023}{1+x^2} - 1 = \frac{2022-x^2}{1+x^2}$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \sqrt{2022}$.

x	$(0, \sqrt{2022})$	$\sqrt{2022}$	$(\sqrt{2022}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2023 \arctan x - x) = -\infty$

$\therefore$ 在 $(\sqrt{2022}, +\infty)$ 内方程有一个根

$\therefore$ 方程 $f(x) = 2023 \arctan x - x = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有三个实根.

二, 填空:

1. $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1) \ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 2.

解: $x=0, x=-1, x=1$ 都是 $f(x)$ 的间断点.

① $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1) \ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x \ln|x|} = 1$

$\therefore x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

② $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1) \ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{2 \ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln|x|}{2 \ln|x|} = \frac{1}{2}$

$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

③ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1) \ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{-(x+1) \ln|x|}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \ln|x|}{-(x+1) \ln|x|} = \infty$

$\therefore x=-1$ 不是可去间断点.

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} [5f(x) + 6]$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \underline{0}$.

解: 有 $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x f(x) = 5a + 6$ 存在. $\therefore x \rightarrow \infty \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \tan x + \sin x)^{\frac{1}{\ln(1+x^3)}} = e^{-\frac{1}{2\pi}}$$

解: "1[∞]"

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - (\tan x - \sin x))^{-\frac{1}{\tan x - \sin x}} \right]^{\frac{\sin x - \tan x}{\ln(1+x^3)}}$$

$$\approx \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{\ln(1+x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (\cos x - 1)}{\pi x^3} = \frac{-\frac{1}{2}}{\pi} = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\therefore \text{原式} = e^{-\frac{1}{2\pi}}$$

$$4. \begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln(t + \sqrt{1-t^2}) \end{cases} \quad \text{求} \quad \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = 0$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\frac{dy}{dx})'_t}{x'_t}$$

$$\text{由 } y' = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \ln y' = \frac{1}{2} \ln(1-t^2) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2), \quad \text{两边对 } t \text{ 求导}$$

$$\frac{1}{y'} \cdot \frac{dy'}{dt} = \frac{-t}{1-t^2} - \frac{t}{1+t^2}, \quad \therefore \frac{dy'}{dt} = y' \cdot \left(\frac{-t}{1-t^2} - \frac{t}{1+t^2} \right)$$

$$\therefore \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{y' \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t}{1+t^2} \right)}{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}} \bigg|_{t=0} = 0$$

$$5. e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0, \quad \text{求} \quad y'(0) = -2$$

$$\text{解: 方程两边对 } x \text{ 求导, 得 } e^y \cdot y' + 6y + 6xy' + 2x = 0 \quad (1)$$

$$(1) \text{ 两边对 } x \text{ 求导, } e^y \cdot (y')^2 + e^y \cdot y'' + 6y' + 6y' + 6xy'' + 2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } y=0; \text{ 代入 } (1) \text{ 得 } y'(0)=0$$

$$\text{代入 } (2) \text{ 式, 得: } y''(0) = -2$$

6. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$, 求 $n > 1$ 时 $y^{(n)} =$ _____.

解: $y = \frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$$

$$y_1 = \frac{1}{x-1}, \quad y_1' = -\frac{1}{(x-1)^2}, \quad y_1'' = \frac{2!}{(x-1)^3}, \quad y_1''' = \frac{-3!}{(x-1)^4}, \quad y_1^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

$$y_2 = \frac{1}{x+1}, \quad y_2^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

$$\therefore y^{(n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \quad (n > 1).$$

7. $y = \sqrt{\frac{\cos x \sqrt{x+1}}{\sqrt{3x+1} (x+\sqrt{x^2+1})}}$, 求 $dy|_{x=0} =$ _____.

解: $\ln y = \frac{1}{2} \ln \cos x + \frac{1}{4} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(3x+1) - \frac{1}{2} \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\frac{\sin x}{2 \cos x} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{3x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\therefore dy|_{x=0} = (y'|_{x=0}) dx = -\frac{3}{4} dx$$

8. 已知对任意 $x > 0$, 设 ξ 为 $f(x) = \arctan x$ 在 $[0, x]$ 根据拉格朗日中值定理所得的中值, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi^2}{x^2} =$ _____.

解: $f(x) - f(0) = f'(\xi) \cdot x$, $\arctan x = \frac{x}{1+\xi^2}$

$$\therefore \xi^2 = \frac{x - \arctan x}{\arctan x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi^2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \arctan x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{3(1+x^2)x^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

10. 曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 6$ 的拐点为 _____.

解: $y' = 3x^2 - 6x + 2$, $y'' = 6x - 6$. 令 $y'' = 0$, $x = 1$.

当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$ $\therefore$ 拐点 $(1, 6)$.

9. 设 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \arctan \frac{1}{x^2 + 1}$ 的带皮亚诺余项的
 n 阶麦克劳林展开式为 $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$
 则在上面的展开式中 x^{2023} 的系数 $a_{2023} =$ _____.

解: $f(-x) = f(x) \quad \therefore f(x)$ 是偶函数.

$\therefore f'(x)$ 是奇函数, $f''(x)$ 是偶函数

$$a_{2023} = \frac{f^{(2023)}(0)}{2023!} = 0. \quad \left(\text{由于 } f^{(2023)}(x) \text{ 是奇函数, 得 } f^{(2023)}(0) = 0. \right)$$

命题: (1) $f(x)$ 可导, 若 $f(-x) = f(x)$, 即 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f'(x)$ 为奇函数.

证明: $f(-x) = f(x)$ 两边对 x 求导, 得:

$$-f'(-x) = f'(x) \quad \therefore f'(-x) = -f'(x) \quad \therefore f'(x) \text{ 为奇函数}$$

(2) $f(x)$ 是可导的奇函数, 则 $f'(x)$ 是偶函数.

证: $f(-x) = -f(x)$, 两边对 x 求导, 得

$$-f'(-x) = -f'(x) \quad \therefore f'(-x) = f'(x), \quad \therefore f'(x) \text{ 为偶函数}$$