

1.

A 题:

下列命题中不一定正确的是 (D).

A. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+2022} = a$ ✓ 极限存在具有唯一性.

B. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a$ ✓

C. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则 $\{x_n\}$ 有界 ✓ 收敛性.

D. 函数 $f(x)$ 定义于 $(a, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 有界 例: $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$

B 题:

下列命题中错误的是 (B).

✓ A. 数列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当其所有子列都收敛到同一极限

✗ B. 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 可能存在某一个子列不收敛到其极限 5/12 矛盾.

✓ C. 数列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $\{x_{2k}\}$ 与 $\{x_{2k+1}\}$ 收敛到同一极限

✓ D. 单调数列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当其某一子列收敛

← 不论如何 $\{x_n\}$ 单调增, 若其子列收敛, 则一定收敛. 又单调有界数列必有极限 $\{x_n\}$

2.

A 题:

极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+3^x}$ 的值为 (D).

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{5}$

D. 不存在

B 题:

极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{1+e^x}$ 的值为 (D).

A. 0

B. -1

C. 1

D. 不存在

4.

A 题:

下列极限中正确的是 (B) $\rightarrow 0$ 无穷

× A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 0$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

× C. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} = 0$

× D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0$
= 1

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

B 题:

设函数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 为 (D).

A. 无界变量

B. 无穷大量

C. 有界, 但非无穷小量

D. 无穷小量

$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. 故 $x \sin \frac{1}{x}$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量.

B 题:

极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1+x)}$ 的值为 (A).

A. $\frac{3}{2}$

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. 不存在

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \left(3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (3 + 0) = \frac{3}{2}$$

6.

A 题:

极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + L + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) \right]$ 的值为 (A).

A. 1

B. π

C. 2π

D. 3π

$$n \times \frac{n}{n^2 + n\pi} \leq \boxed{} \leq n \times \frac{n}{n^2 + \pi}$$

$\downarrow$ $\quad \quad \quad$ $\downarrow$

1 $\quad \quad \quad$ $\frac{1}{n^2 + \pi} = 1$ $\quad \quad \quad$ 1

B 题:

设 $0 < a < b$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$ 的值为 (B).

A. a

B. b

C. 1

D. a+b

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b^n \left(1 + \left(\frac{a}{b} \right)^n \right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} b \cdot \left(1 + \left(\frac{a}{b} \right)^n \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1^0 \rightarrow 1$$

$$= b$$

7.

8.

A 题:

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 2}{e^x + 1} \arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \end{cases}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 (C).

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 2}{e^x + 1} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 2}{e^x + 1} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{4}$$

- A. 连续点
B. 第一类可去间断点
☒ C. 第一类跳跃间断点
D. 第二类间断点

B 题:

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{1 - e^x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x}, & -1 < x < 0 \end{cases}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 (C).

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 3x}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{-x} = -3$$

- A. 连续点
B. 第一类可去间断点
☒ C. 第一类跳跃间断点
D. 第二类间断点

9.

A 题:

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义, $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件

为 (A).

✓ A. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\sin h)}{h}$ 存在 $\xrightarrow{\sin h \sim h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$ 存在.

$$\Leftrightarrow f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \text{ 存在.}$$

B. $\lim_{h \rightarrow +\infty} hf\left(\frac{1}{h}\right)$ 存在 $\xrightarrow{h \rightarrow +\infty} \frac{f(\frac{1}{h})}{\frac{1}{h}} \xrightarrow{h=t} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ 存在.

只表示右导数存在!

C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-\cos h)}{h^2}$ 存在 $\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{h^2}{2})}{h^2} \xrightarrow{h^2=t} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{2t}$ 存在. (只表示右导数存在)

D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$ 存在 $\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0) - (f(-h) - f(0))}{2h} \neq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{2h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h) - f(0)}{2h}$

B 题:

设 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内有定义, $f(1)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的充要条件

为 (D).

A. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$ 存在 $\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$ 存在 (D)

B. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[1 + \ln(1+2h^2)]}{e^{h^2} - 1}$ 存在 $\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h^2)}{h^2} \xrightarrow{h^2=t} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1+t)}{t}$

C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-\cos h)}{h}$ 存在 $\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{f(1+1-\cos h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+\frac{h^2}{2})}{h} \xrightarrow{h^2=t} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1+t)}{h}$

✓ D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e^h)}{h}$ 存在 $\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{f(1+e^h-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h}$ (与定义一致!)

10.

10.

A 题:

设函数带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林展开式为 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$,

则函数 $f(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林的展开式中, x^{2022}

的系数 a_{2022} 为 (A).

A. 0

B. $\frac{1}{2022!}$

C. 1

D. $-\frac{1}{2021!}$

B 题:

设函数带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林展开式为 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$, 故 $a_{2022} = 0$

则函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林的展开式中, x^{2023}

的系数 a_{2023} 为 (A).

A. 0

B. $\frac{1}{2023!}$

C. 1

$$\text{令 } g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$g(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln\left(\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)$$

$$= -\ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

故 $g(x)$ 为奇函数.

$f(x) = x^2 g(x)$ 为奇函数, 其展开式中无偶次幂项.

$f(x)$ 为偶函数, 展开式无奇次幂项.

故 $a_{2023} = 0$

11.

A 题:

函数 $f(x) = (x-1)|x+1| + x|x|$ 不可导点的个数为 (C).

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

B 题:

函数 $f(x) = (x^2 - 1)|x^2 - x|$ 不可导点的个数为 (C).

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

$x = -1$ 不可导.
 $x = 0$ 可导.

$= (x+1)(x-1)|x| \cdot |x-1|$
 $x = 1$ 可导!
 $x = 0$ 不可导.

13.

A 题:

$\sim \cos^2 x \sim x^2$
 $\alpha_1 = e^{\sin^2 x} - 1$, $\alpha_2 = \ln(1+x)$, $\alpha_3 = \sqrt{x}(\cos \sqrt{x} - 1)$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 以上 3 个无穷小按低阶到高阶的排序为 (C).

$\sim \sqrt{x} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$
 故 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ B. $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$ C. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$ D. $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$

B 题:

$\sim 3x$
 $\sim \frac{1}{2}x^2$
 $\sim x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{1}{6}x^3$

$\alpha_1 = \tan 3x$, $\alpha_2 = \sqrt[3]{1+x^2} - 1$, $\alpha_3 = x - \sin x$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 以上 3 个无穷小按低阶到高阶的排序为 (A).

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ B. $\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2$ C. $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$ D. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2$

A 题:

设 $f(x), g(x) (a < x < b)$ 为大于 0 的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当

$a < x < b$ 时, 有 (A) .

A. $f(x)g(b) > f(b)g(x)$

B. $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

C. $f(x)g(x) > f(b)g(b)$

D. $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

$$\text{有 } \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0.$$

$$\text{即 } \frac{f(x)}{g(x)} \downarrow \text{ 有 } \frac{f(a)}{g(a)} > \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(b)}{g(b)}$$

B 题:

设 $f(x), g(x) (a < x < b)$ 为大于 0 的可导函数, 且 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) > 0$, 则当

$a < x < b$ 时, 有 (D) .

A. $f(x)g(b) > f(b)g(x)$

B. $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

C. $f(x)g(x) > f(b)g(b)$

D. $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

$$\text{有 } (f(x) \cdot g(x))' = f'g + fg' > 0$$

$$\text{即 } f(x) \cdot g(x) \uparrow$$

$$\text{有 } f(a)g(a) < f(x)g(x) < f(b)g(b)$$

16.

A 题:

已知 $f(x)$ 二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x + xf(x)}{x^3} = 0$, 则 $f(x)$ 有极小值 (A) .

A. -2

B. 0

C. 1

D. 2

$$f_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - 2x + 2x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x - 2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + f(x)}{x^2}$$

$$\text{即 } 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{3}. \text{ 故 } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + f(x)}{x^2} = \frac{1}{3} > 0}$$

17.

A 题:

曲线 $y = \frac{1}{x} + \arctan x$ 的渐近线的条数为 (A)

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

B 题:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \arctan x \right) = \frac{\pi}{2} \text{ 有水平渐近线 } y = \frac{\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} + \arctan x \right) = -\frac{\pi}{2} \text{ 有水平渐近线 } y = -\frac{\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \arctan x \right) = \infty \text{ 有垂直渐近线 } x = 0. \quad \checkmark$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \arctan x \right) = 0. \text{ 无斜渐近线.}$$

曲线 $y = \arctan 2x - \frac{1}{x^2}$ 的渐近线的条数为 (A).

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctan 2x - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{有水平渐近线 } y = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\arctan 2x - \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{有水平渐近线 } y = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty \quad \text{有斜渐近线 } x = 0.$$

18.

A 题:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{无斜渐近线.}$$

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 2t \\ y = t + e^{-t} \end{cases}$ 确定, 则函数 $y = y(x)$ (B).

A. 在 $t \in (-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $t \in (0, +\infty)$ 上单调递减

B. 在 $t \in (-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $t \in (0, +\infty)$ 上单调递增

C. 在 $t \in (-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $t \in (0, +\infty)$ 上单调递增

D. 在 $t \in (-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $t \in (0, +\infty)$ 上单调递减

B 题:

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \arctan t \\ y = -\frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{2} \end{cases}$ 确定, 则函数 $y = y(x)$ (D).

A. 在 $t \in (-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $t \in (1, +\infty)$ 上单调递减

B. 在 $t \in (-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $t \in (1, +\infty)$ 上单调递增

C. 在 $t \in (-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $t \in (1, +\infty)$ 上单调递增

D. 在 $t \in (-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $t \in (1, +\infty)$ 上单调递减

19.

A 题:

设函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 满足 $xf''(x) + 2022x[f'(x)]^2 = 1 - e^x$, 若 $f'(1) = 0$, 则

(A).

$\lambda x = 1: f''(1) = 1 - e < 0.$

因为 $f'(1) = 0$, 且 $f''(1) < 0$, 故 $x = 1$ 处 $f(x)$ 取得极大值.

A. $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(1, f(1))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

D. $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(1, f(1))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

B 题:

设函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 满足 $f''(x) + 2022[f'(x)]^2 = x$, 若 $f'(1) = 0$, 则 (B).

A. $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值

$\lambda x = 1: f''(1) = 1 > 0.$

B. $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(1, f(1))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

D. $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(1, f(1))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

因为 $f'(1) = 0$, $f''(1) > 0$, 故 $x = 1$ 处 $f(x)$ 取得极小值.

20.

A 题:

下列说法中正确的个数为 (C) .

- ① 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(a) > 0$, 则一定存在 $\delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $(a, a + \delta)$ 内单调增加
- ② 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的左右导数均存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处一定连续
- ③ 设函数 $f(x)$ 连续, 若 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 则 $f(x_0)$ 一定不是 $f(x)$ 的极值
- ④ 连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值一定是其极大值

- A. 3
- B. 2
- C. 1
- D. 4

B 题:

下列说法中正确的个数为 (C) .

- ① 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(a) > 0$, 则一定存在 $\delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $(a, a + \delta)$ 内单调增加
- ② 若连续函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极值, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处一定可导
- ③ 设函数 $f(x)$ 三阶可导, 若 $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) = 1$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- ④ 连续函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内若有唯一极大值, 则一定是其最大值

- A. 3
- B. 2
- C. 1
- D. 4

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处一定可导. (错) 例如 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处

$f(x)$ 可导, $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=1$. 则

$(x_0, f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点. (对)

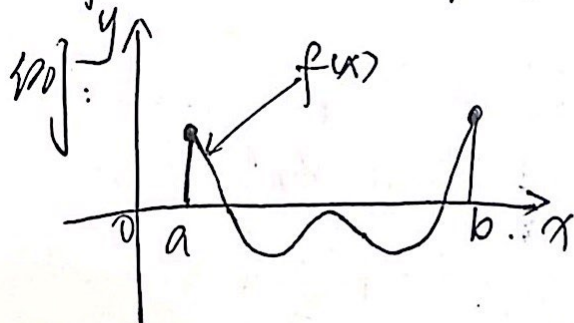
解: $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = 1 > 0$.

由保号性, 存在 x_0 的邻域, 有

$$\frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \begin{cases} x > x_0 \text{ 时: } f''(x) > 0 \\ x < x_0 \text{ 时: } f''(x) < 0 \end{cases}$$

故 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点.

$f(x)$ 在 (a, b) 内有唯一极大值, 则一定是最大值. (错)



$f(x)$ 在 (a, b) 内有
唯一极大值, 但
不是最大值.

此时 $f(x)$ 在 (a, b) 内无最大值.

命题② $f(x)$ 在 $x=x_0$ 左右两侧的极限. 则
 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. (对!)

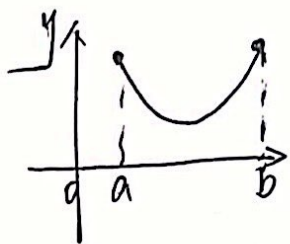
例. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在.

故分子一定趋于 0, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$
 定数!

$$\left. \begin{aligned} \text{故 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0) \\ \text{类似有 } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= f(x_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

综上 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. 故 $f(x)$ 在 x_0 连续

命题④ $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上端点左一定是极大值.



若极大值在端点上取得, (错!)

则端点 a, b 不满足极值的定义.

极值是一个邻域的概念!!

例如在 (x_0-d, x_0+d) 内, $f(x_0) \geq f(x)$

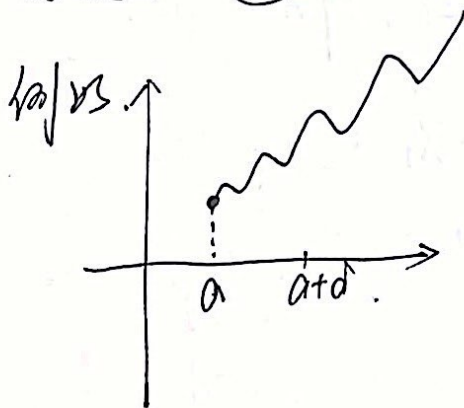
对 $f(x)$ 求导. 且 $f'(a) > 0$. 则 $\exists d > 0$, 使 $f(x)$ 在 $(a, a+d)$ 内严格增加. (错).

解: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$.

由保号性可知, 在 $(a, a+d)$ 有 $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$

即 $f(x) > f(a)$.

但 $f(x) > f(a)$ 并不能保证 $f(x)$ 在 $(a, a+d)$ 内是增的!!!



这个函数在 $(a, a+d)$ 内 $\forall x, f(x) > f(a)$ 但这个函数并不是增函数!