

第9章 拉普拉斯变换

引言

拉普拉斯变换与 z 变换的分析方法是傅里叶分析法的推广，傅里叶分析是它们的特例。

- 以傅里叶变换为基础的频域分析方法的优点在于：它给出的结果有着清楚的物理意义，但也有不足之处，傅里叶变换只能处理符合狄利克雷条件的信号，而有些信号是不满足绝对可积条件的，因而其信号的分析受到限制；
- 另外在求时域响应时运用傅里叶反变换对频率进行的无穷积分求解困难。

•优点:

**求解比较简单，特别是对系统的微分方程进行变换时，
初始条件被自动计入，因此应用更为普遍。**

•缺点:

物理概念不如傅氏变换那样清楚。

9.1

拉普拉斯变换

复指数信号 e^{st} 是一切LTI系统的特征函数。

如果LTI系统的单位冲激响应为 $h(t)$ ，则系统对 e^{st} 产生的响应是：

$$y(t) = H(s)e^{st}, \text{ 其中 } H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$$

显然当 $s = j\omega$ 时，就是连续时间傅里叶变换。

□ 双边拉氏变换的定义

信号 $x(t)$, 乘以衰减因子 $e^{-\sigma t}$ (σ 为任意实数) 后容易满足绝对可积条件, 依傅氏变换定义 :

$$\begin{aligned} X_1(j\omega) &= F[x(t) \cdot e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \end{aligned}$$

令: $\sigma + j\omega = s$, 具有频率的量纲, 称为复频率。

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-s t} dt$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

复平面

称为 $x(t)$ 的**双边拉氏变换**，其中 $s = \sigma + j\omega$ 。

若 $\sigma = 0$ ， $s = j\omega$ ，则有： $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$

这就是 $x(t)$ 的**傅里叶变换**。

复平面虚轴

表明：连续时间傅里叶变换是双边拉普拉斯变换在 $\sigma = 0$ 或是在 $j\omega$ 轴上的特例。

$x(t)$ 的拉氏变换就是 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换。

只要有合适的 σ 存在，就可以使某些本来不满足狄里赫利条件的信号在引入 $e^{-\sigma t}$ 后满足该条件。

拉氏变换比傅里叶变换有更广泛的适用性。

□ 常见信号的拉氏变换

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \quad a > 0$$

1、 $x(t) = e^{-at} u(t)$

右边信号

信号在某时刻之后（右边）有非零值，称该信号为右边信号。

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt$$

在 $\text{Re}[s] > -a$ 时，积分收敛。

$$X(s) = \frac{1}{s + a} \quad \text{Re}[s] > -a$$

2、 $x(t) = e^{-at} u(t) = u(t)$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad \text{Re}[s] > 0$$

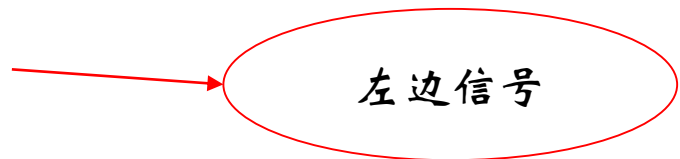
- ✓ 对于拉氏变换，不是在所有的 s 值下都收敛
- ✓ 收敛域：使拉氏变换收敛的 s 区间，在复平面讨论。拉氏变换的收敛域 ROC (Region of Convergence) 对拉氏变换是非常重要的概念。

收敛域：使 $X(s)$ 存在的 s 的区域称为收敛域。

记为：ROC(region of convergence)

实际上就是拉氏变换存在的条件；

3、 $x(t) = \delta(t) \leftrightarrow 1$ ROC为全部的 s

4、 $x(t) = -e^{-at}u(-t)$  左边信号

$$X(s) = -\int_{-\infty}^0 e^{-at} e^{-st} dt = -\int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}[s] < -a$$

不同的信号可能会有完全相同的拉氏变换表达式，只是它们的收敛域不同。

只有拉氏变换的表达式连同相应的收敛域，才能和信号建立一一对应的关系。

5、 $x(t) = -u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad \text{Re}\{s\} < 0$

如果拉氏变换的ROC包含 $j\omega$ 轴，则有

$$X(j\omega) = X(s) \Big|_{s=j\omega}$$

否则，傅立叶变换就不存在

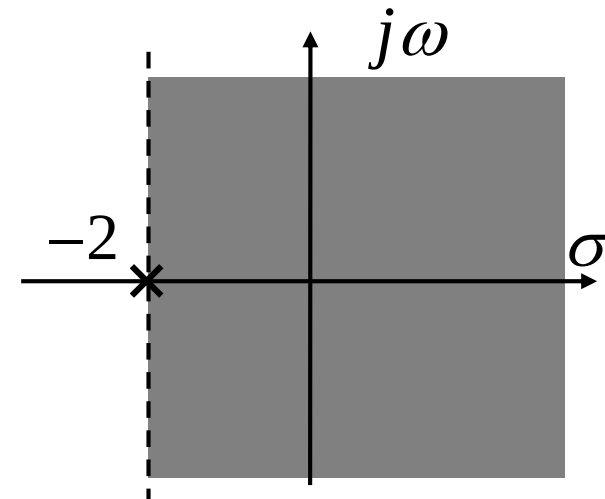
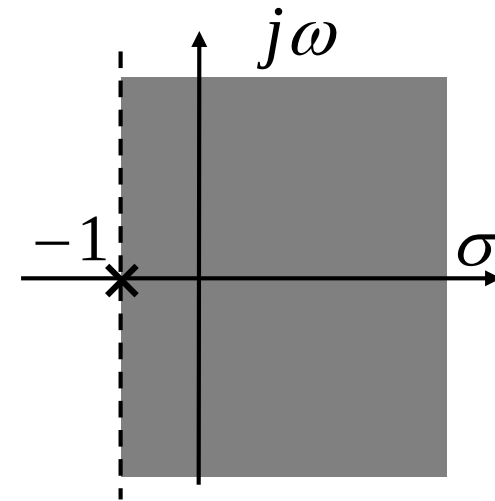
□ 拉氏变换的ROC及零极点图

例3. $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-st} dt$$

$$\because e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}[s] > -1$$

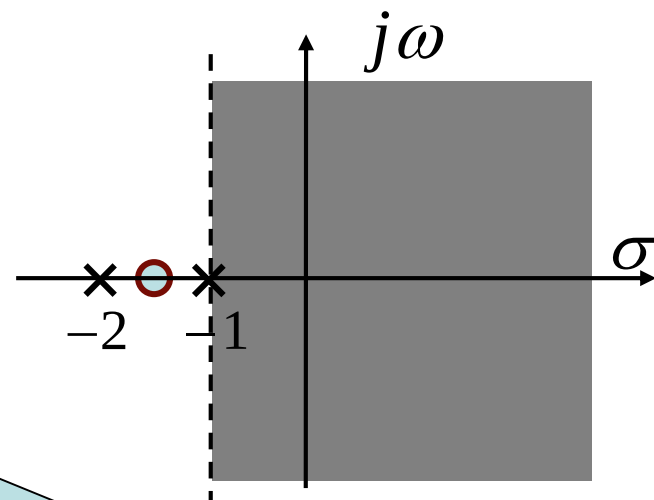
$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}[s] > -2$$



□ 拉氏变换的ROC及零极点图

$$\therefore X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2},$$

$$\text{Re}[s] > -1$$



在无限远处有一个
零点

可见：拉氏变换的收敛域是各个收敛域的公共部分。ROC总是以平行于 $j\omega$ 轴的直线作为边界的，ROC的边界总是与 $X(s)$ 的分母的根相对应的。

若 $X(s)$ 是有理函数
$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = M \frac{\prod_i (s - \beta_i)}{\prod_i (s - \alpha_i)}$$

分子多项式的根称为**零点**，分母多项式的根称为**极点**。

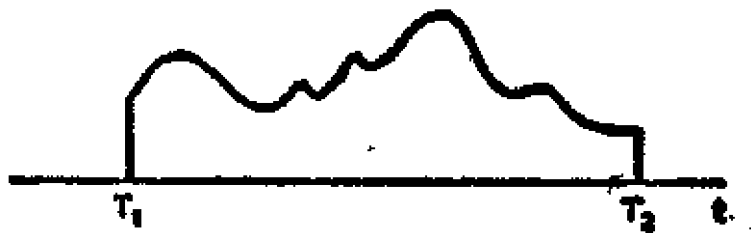
将 $X(s)$ 的全部零点和极点表示在 s 平面上，就构成了**零极点图**。零极点图及其**收敛域**可以表示一个 $X(s)$ ，最多与真实的 $X(s)$ 相差一个常数因子 M 。

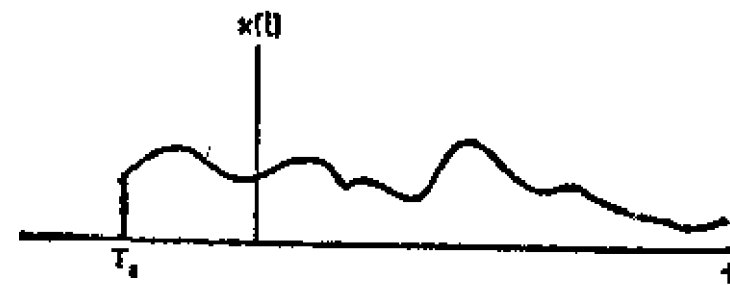
□ ROC的两个概念

1. **右边信号**：在有限时间 T_1 之前，信号值为0，称该信号为右边信号。
2. **左边信号**：在有限时间 T_2 之后，信号值为0，称该信号为左边信号。
3. **有理的 $X(s)$** ：只要 $x(t)$ 是实指数或复指数的线性组合， $X(s)$ 就是有理的。

□ ROC 的性质

1. ROC是 s 平面上平行于 $j\omega$ 轴的带形区域。
2. 有理拉普拉斯变换在ROC内无任何极点。
3. 信号是有限持续期，并且绝对可积（时限信号）
它的ROC是整个 s 平面。





4. 右边信号如果存在收敛域，则ROC位于S平面内一条平行于 $j\omega$ 轴的直线的右边。

若 $x(t)$ 是右边信号, $T \leq t < \infty$, σ_0 是ROC边线, 则有 $x(t)e^{-\sigma_0 t}$ 绝对可积, 即:

$$\int_T^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty$$

若 $\sigma_1 > \sigma_0$ 则

$$\int_T^\infty |x(t)e^{-\sigma_1 t}| dt$$

$$= \int_T^\infty |x(t)e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}| dt \quad e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} \text{ 是一个递减函数}$$

$$\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T} \int_T^\infty |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty$$

表明 σ_1 也在收敛域内。

5. 左边信号 若存在收敛域, ROC位于S平面内一条平行于 $j\omega$ 轴的直线的左边。

若 $x(t)$ 是左边信号, 定义于 $(-\infty, T]$, σ_0 在 ROC 边线, $\sigma_1 < \sigma_0$, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^T |x(t)e^{-\sigma_1 t}| dt &= \int_{-\infty}^T |x(t)e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}| dt \quad e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} \text{是一个递增函数} \\ &\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T} \int_{-\infty}^T |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty \end{aligned}$$

表明 σ_1 也在收敛域内。

6. 双边信号的ROC如果存在，一定是 s 平面内平行于 $j\omega$ 轴的带形区域。

ROC的几种情况：

- 1、时间域右边信号- $\rightarrow$ 右半平面 $\text{Re}[s] > a$
- 2、时间域左边信号- $\rightarrow$ 左半平面 $\text{Re}[s] < b$
- 3、时间域无限信号- $\rightarrow$ 带状区域 $a < \text{Re}[s] < b$
- 4、时间域带限信号- $\rightarrow$ 全部平面

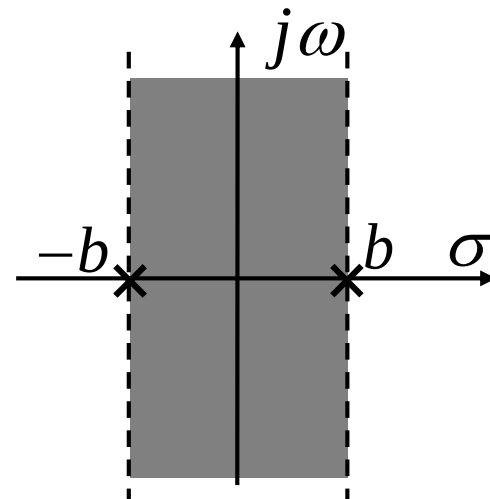
5、 $x(t) = e^{-b|t|}$

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$$

$$e^{-bt}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+b}, \quad \text{Re}[s] > -b$$

$$e^{bt}u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s-b}, \quad \text{Re}[s] < +b$$

当 $b > 0$ 时, 上述ROC有公共部分,



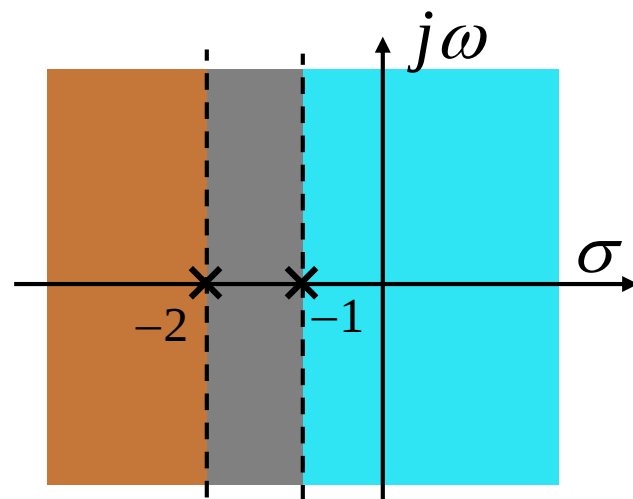
当 $X(s)$ 是有理函数时，其ROC总是由 $X(s)$ 的极点分割的。ROC必然满足下列规律：

1. 右边信号的ROC一定位于 $X(s)$ 最右边极点的右边。
2. 左边信号的ROC一定位于 $X(s)$ 最左边极点的左边。
3. 双边信号的ROC可以是任意两相邻极点之间的带形区域。

9.6

例2.
$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$



可以形成三种 ROC:

- 1) ROC: $\text{Re}[s] > -1$
- 2) ROC: $\text{Re}[s] < -2$
- 3) ROC: $-2 < \text{Re}[s] < -1$

此时 $x(t)$ 是右边信号。

此时 $x(t)$ 是左边信号。

此时 $x(t)$ 是双边信号。

9.3

拉普拉斯反变换

□ 定义

由 $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$

若 $s = \sigma + j\omega$ 在ROC内, 则有:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \mathbb{F}[x(t)e^{-\sigma t}]$$

$$\therefore x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{\sigma t} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) e^{st} d\omega$$

□ 定义

由 $s = \sigma + j\omega$ 得 $ds = j d\omega$

当 ω 从 $-\infty \rightarrow +\infty$ 时, s 从 $\sigma - j\infty \rightarrow \sigma + j\infty$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

—— $X(s)$ 的反变换

拉氏反变换表明: $x(t)$ 可以被分解成复振幅为 $\frac{1}{2\pi j} X(s) ds$ 的复指数信号 e^{st} 的线性组合。

9.3 拉普拉斯反变换

□ 反变换的求解方法

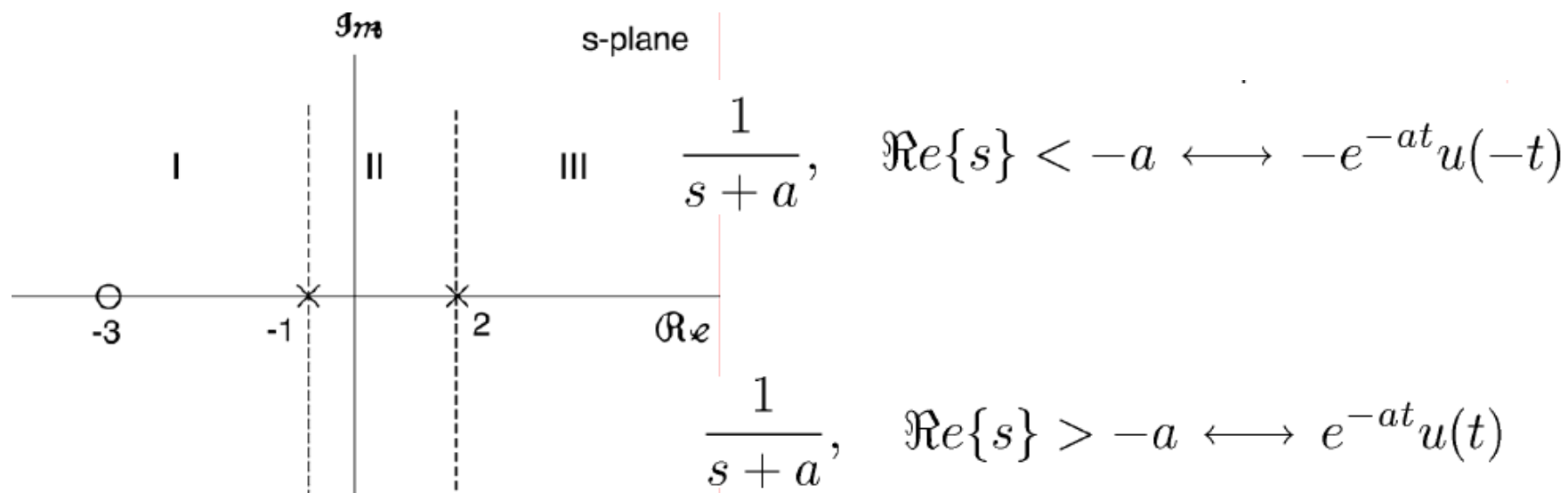
❖ 部分分式展开法：

1. 将 $X(s)$ 展开为部分分式。
2. 根据 $X(s)$ 的ROC，确定每一项的ROC。
3. 利用常用信号的变换对与拉氏变换的性质，对每一项进行反变换。

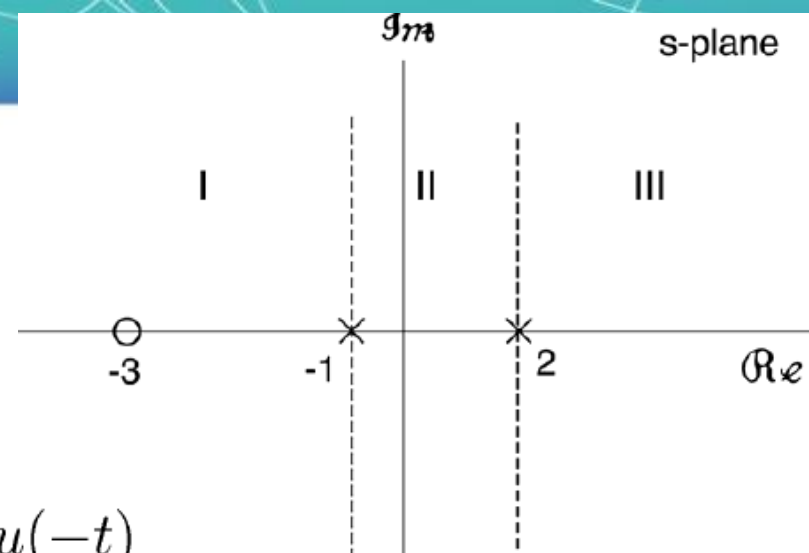
9.3 拉普拉斯反变换

$$X(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}$$

$$A = -\frac{2}{3}, \quad B = \frac{5}{3}$$



9.3 拉普拉斯反变换



ROC I:

$$\begin{aligned} x(t) &= -Ae^{-t}u(-t) - Be^{2t}u(-t) \\ &= \left[\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{5}{3}e^{2t} \right] u(-t) \quad \text{Left-sided signal} \end{aligned}$$

ROC II:

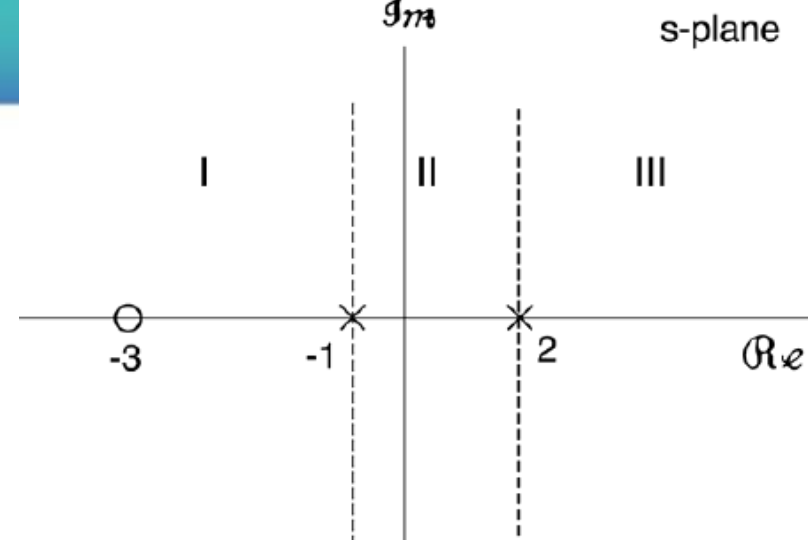
$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-t}u(t) - Be^{2t}u(-t) \\ &= - \left[\frac{2}{3}e^{-t}u(t) + \frac{5}{3}e^{2t}u(-t) \right] \end{aligned}$$

Two-sided signal, has Fourier Transform

9.3 拉普拉斯反变换

ROC III:— Right-sided signal.

$$\begin{aligned}x(t) &= Ae^{-t}u(t) + Be^{2t}u(t) \\&= \left[-\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{5}{3}e^{2t} \right] u(t)\end{aligned}$$



$X(s)$ 两种特殊情况

非真分式——化为真分式+多项式

含 e^{-s} 的非有理式

1. 非真分式——真分式+多项式

$$X(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{s^2 + 3s + 2}$$

$$X(s) = s + 2 + \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = s + 2 + X_1(s)$$

$$X_1(s) = \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

$$x(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

作长除法

$$\begin{array}{r} s + 2 \\ s^2 + 3s + 2 \overline{) s^3 + 5s^2 + 9s + 7} \\ \underline{s^3 + 3s^2 + 2s} \\ 2s^2 + 7s + 7 \\ \underline{2s^2 + 6s + 4} \\ s + 3 \end{array}$$

2. 含 e^{-s} 的非有理式

e^{-s} 项不参加部分分式运算，求解时利用时移性质。

$$\frac{e^{-2s}}{s^2 + 3s + 2} = X_1(s)e^{-2s}$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

$$\text{所以 } x_1(t) = L^{-1}[X_1(s)] = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$\text{所以 } x(t) = x_1(t-2) = [e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}]u(t-2)$$

求拉普拉斯反变换

$$(1) \quad X(s) = \frac{5s + 13}{s(s^2 + 4s + 13)} \quad \text{Re}[s] > 0$$

$$(2) \quad X(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s + 3)(s + 5)^2} \quad \text{Re}[s] > -3$$

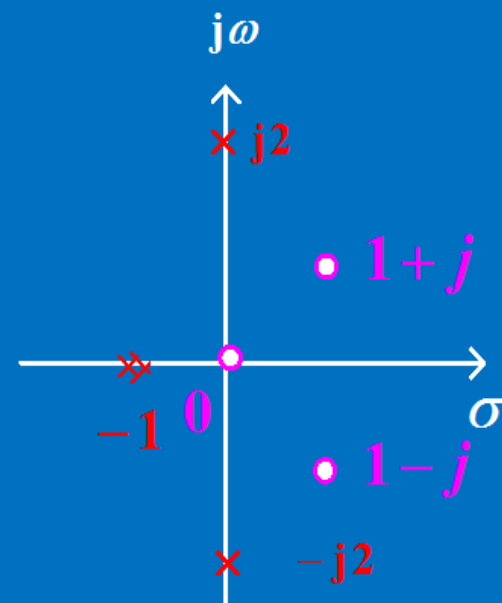
$$(3) \quad X(s) = \frac{2 + 2se^{-2s} + 4e^{-4s}}{s^2 + 4s + 3} \quad \text{Re}[s] > -1$$

$$H(s) = \frac{s(s-1+j1)(s-1-j1)}{(s+1)^2(s+j2)(s-j2)}$$

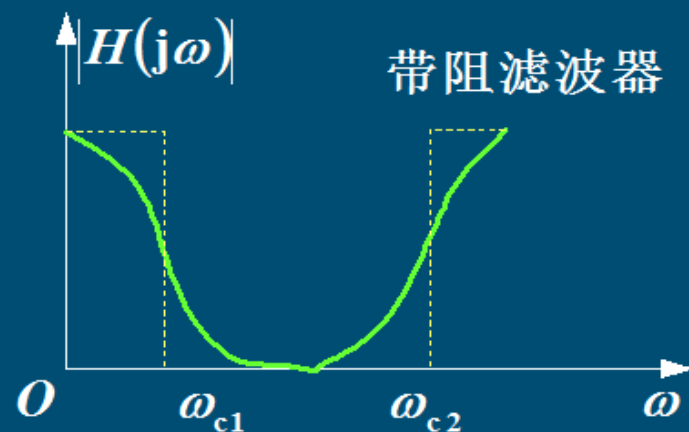
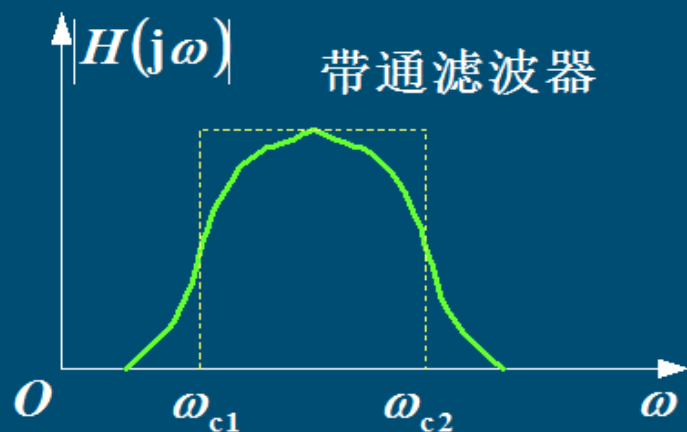
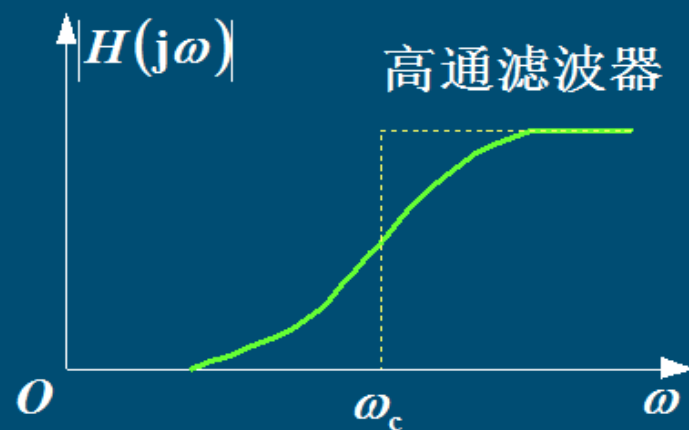
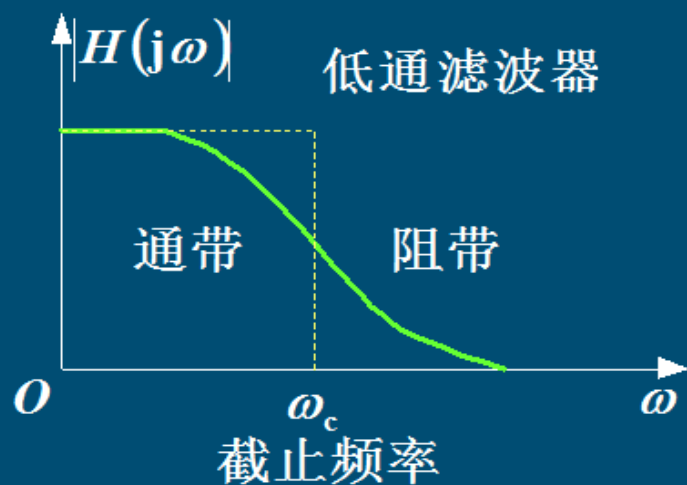
极点: $p_1 = p_2 = -1, p_3 = -j2, p_4 = j2$

零点: $z_1 = 0, z_2 = 1-j1, z_3 = 1+j1, z_4 = \infty$

画出零极点图:



几种常见的滤波器



$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \Big|_{s=j\omega} = K \frac{\prod_{j=1}^m (j\omega - z_j)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)}$$

可见 $H(j\omega)$ 的特性与零极点的位置有关。

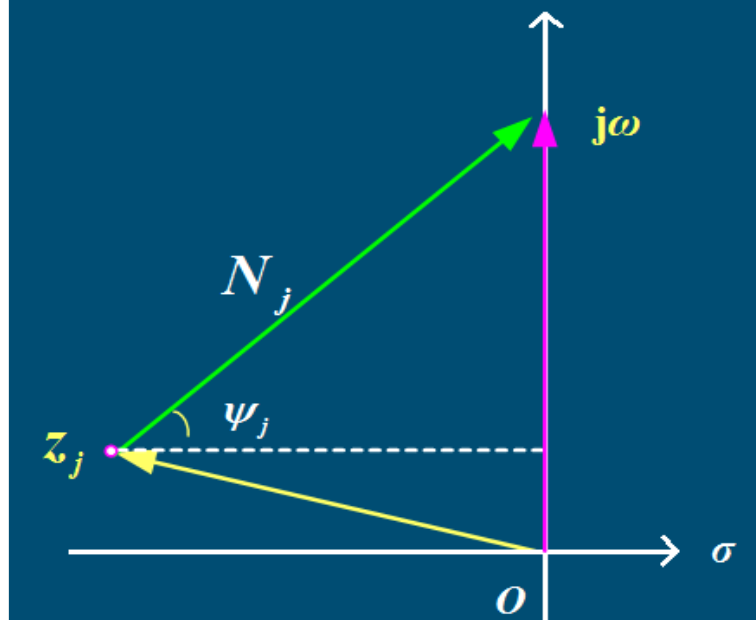
令分子中每一项 $j\omega - z_j = N_j e^{j\psi_j}$

分母中每一项 $j\omega - p_i = M_i e^{j\theta_i}$

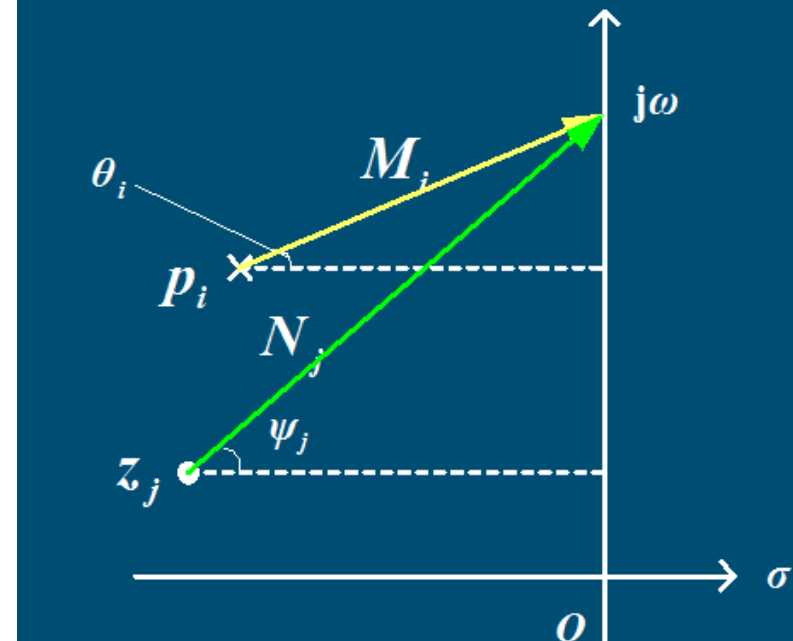
将 $j\omega - z_j$ 、 $j\omega - p_i$ 都看作两矢量之差，将矢量图画于复平面内。

画零极点图

零点： $j\omega = N_j e^{j\psi_j} + z_j$



极点： $j\omega = M_i e^{j\theta_i} + p_i$



$j\omega$ 是滑动矢量, $j\omega$ 矢量变, 则 N_j 、 ψ_j 和 M_i 、 θ_i 都发生变化。

$$H(j\omega) = K \frac{N_1 e^{j\psi_1} N_2 e^{j\psi_2} \cdots N_m e^{j\psi_m}}{M_1 e^{j\theta_1} M_2 e^{j\theta_2} \cdots M_n e^{j\theta_n}}$$

$$= K \frac{N_1 N_2 \cdots N_m e^{j(\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m)}}{M_1 M_2 \cdots M_n e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)}}$$

$$|H(j\omega)| = K \frac{N_1 N_2 \cdots N_m}{M_1 M_2 \cdots M_n}$$

$$\varphi(\omega) = (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)$$

当 ω 沿虚轴移动时，各复数因子(矢量)的模和辐角都随之改变，于是得出幅频特性曲线和相频特性曲线。

□ 一般情况

当 s_1 取为 $j\omega$ 轴上的点时，即为傅里叶变换的几何求值。
考查 s_1 在 $j\omega$ 轴上移动时所有零、极点矢量的长度和幅角的变化，即可得出 $H(j\omega)$ 的幅频特性和相频特性。

9.4 由零极点图对傅里叶变换几何求值

例1. 一阶系统: $\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

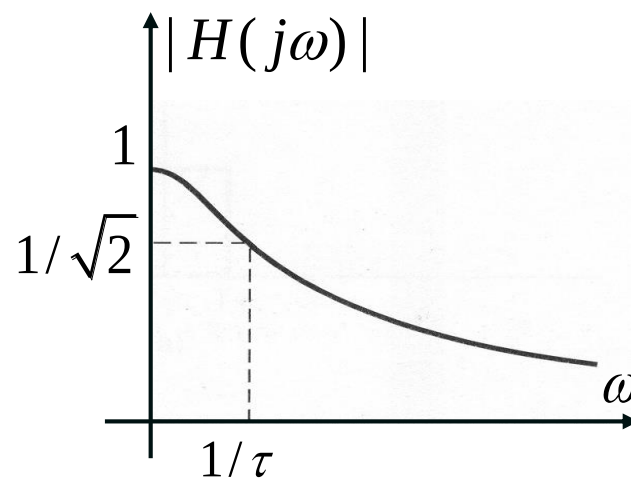
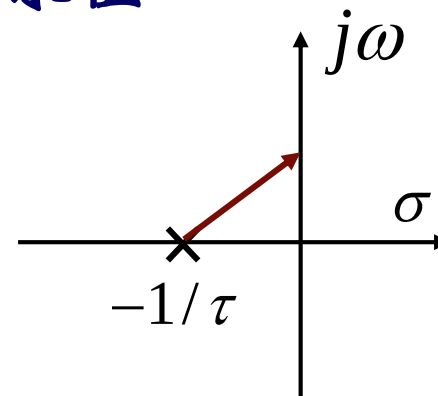
$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t),$$

$$H(s) = \frac{1/\tau}{s + (1/\tau)}, \quad \text{Re}[s] > -\frac{1}{\tau}$$

随着 $\omega \uparrow$, $|H(j\omega)|$ 单调下降,

$\omega = \frac{1}{\tau}$ 时, 下降到最大值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

最大值在 $\omega = 0$ 时取得。

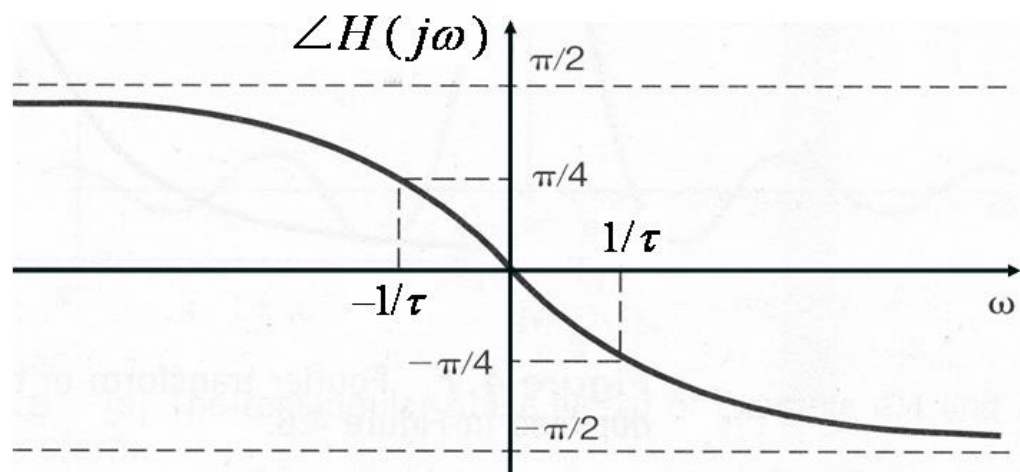


9.4 由零极点图对傅里叶变换几何求值

相位特性：当 $\omega = 0$ 时, $\angle H(j\omega) = 0$

随着 $\omega \uparrow$, $\angle H(j\omega)$ 趋向于 $-\pi/2$ 。

$\omega \downarrow$ 则 $\angle H(j\omega)$ 趋向于 $\pi/2$ 。



9.5 拉氏变换的性质

❖ 拉氏变换与傅氏变换一样具有很多重要的性质。

1. 线性 (Linearity) :

零极点抵消时,ROC会扩大

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s), \quad \text{ROC} : R_1$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s), \quad \text{ROC} : R_2$$

则 $ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s)$

ROC至少是 $R_1 \cap R_2$

$$x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = 1$$

例. $x_1(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$ $x_2(t) = -e^{-t}u(t)$

$$X_1(s) = 1 + \frac{1}{s+1} = \frac{s+2}{s+1}, \quad \text{ROC} : \sigma > -1$$

$$X_2(s) = \frac{-1}{s+1}, \quad \text{ROC} : \sigma > -1$$

而 $x_1(t) + x_2(t) = \delta(t) \leftrightarrow 1$ (原因是出现了零极点相抵消的现象)

ROC扩大为整个S平面。

2. 时移性质 (Time Shifting) :

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, ROC : R

则 $x(t - t_0) \leftrightarrow X(s)e^{-st_0}$, ROC不变

3. S域平移 (Shifting in the s-Domain) :

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, ROC : R 则

$x(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s - s_0)$, ROC : $R + \text{Re}[s_0]$

$$\delta(t-T) \leftrightarrow e^{-sT}$$

时移性质
ROC不变

频移性质
ROC变化

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

$$(\cos \omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$(e^{-at} \cos \omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

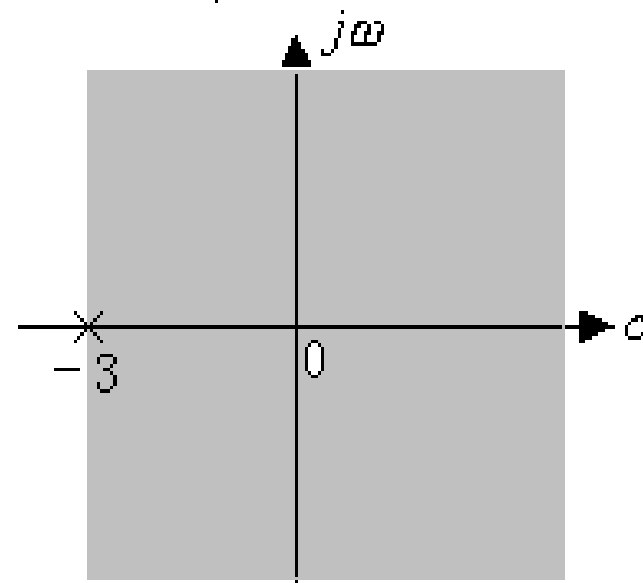
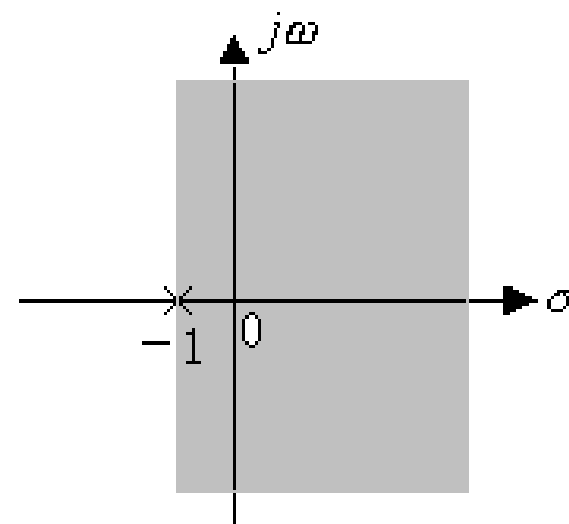
$$x(t) = e^{-t}u(t),$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \sigma > -1$$

$$x(t) \cdot e^{-2t} = e^{-3t}u(t)$$

$$X(s+2) = \frac{1}{s+3}$$

显然 ROC : $\sigma > -3$



4. 时域尺度变换 (Time Scaling) :

若 $x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \text{ROC} : R$

则 $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{ROC} : aR$

可见：若信号在时域尺度变换，其拉氏变换的ROC在S平面上作相反的尺度变换。

特例 $x(-t) \leftrightarrow X(-s), \quad \text{ROC} : -R$

$$u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

$$u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{-s} \quad \text{Re}\{s\} < 0$$

例. $x(t) = e^{-t}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \sigma > -1$

求 $x(\frac{t}{2}) = e^{-\frac{t}{2}}u(t)$ **的拉氏变换及ROC**

$$X(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}} = \frac{2}{2s + 1}, \quad \text{ROC} : \sigma > -\frac{1}{2}$$

5. 共轭对称性 (Conjugation) :

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, ROC: R 则

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(s^*), \text{ ROC: } R$$

当 $x(t)$ 为实信号时, 有: $x^*(t) = x(t)$

$$\therefore X(s) = X^*(s^*) \text{ 或 } X^*(s) = X(s^*)$$

5. 共轭对称性 (Conjugation) :

如果 $x(t)$ 是实信号, 且 $X(s)$ 在 s_0 有极点 (或零点), 则 $X(s)$ 一定在 s_0^* 也有极点 (或零点)。
这表明: 实信号的拉氏变换其复数零、极点必共轭成对出现。

6. 卷积性质: (Convolution Property)

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s)$, ROC: R_1

$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s)$, ROC: R_2 则

$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$ ROC: 包括 $R_1 \cap R_2$

6. 卷积性质: (Convolution Property)

例. $X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{ROC} : R_1 = \sigma > -1$

$$X_2(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}, \quad \text{ROC} : R_2 = \sigma > -2$$

显然有: $R_1 \cap R_2 = \sigma > -1$

$$X_1(s)X_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}, \quad \sigma > -2,$$

ROC扩大

7. 时域微分: (Differentiation in the Time Domain)

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, ROC: R

则 $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s)$, ROC包括 R , 有可能扩大。

8. S域微分: (Differentiation in the s-Domain)

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, ROC: R $tu(t) \xleftrightarrow{L} ?$

则 $-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}$, ROC: R $\frac{t^2}{2}u(t) \xleftrightarrow{L} ?$

例. $X(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$ ROC: $\sigma > -a$ **求** $x(t)$

$$\therefore \frac{1}{(s+a)^2} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+a} \right)$$

$$\therefore x(t) = te^{-at}u(t)$$

9. 时域积分: (Integration in the Time Domain)

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, ROC : R

则 $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s)$

ROC : **包括** $R \cap (\text{Re}[s] > 0)$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1 \quad \text{全部 } s$$

$$u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

10. 初值与终值定理:
(The Initial- and Final- Value Theorems)

如果 $x(t)$ 是因果信号, 且在 $t = 0$ 不包含奇异函数,
则
$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

$\because t < 0$ 时 $x(t) = 0$, 且在 $t = 0$ 不包含奇异函数

$$\therefore x(t) = x(t)u(t)$$

将 $x(t)$ 在 $t = 0^+$ 展开为Taylor级数有:

$$x(t) = \left[x(0^+) + x'(0^+)t + x''(0^+)\frac{t^2}{2} + \cdots + x^{(n)}(0^+)\frac{t^n}{n!} + \cdots \right] u(t)$$

对上式两边做拉氏变换:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s} x(0^+) + \frac{1}{s^2} x'(0^+) + \cdots + \frac{1}{s^{n+1}} x^{(n)}(0^+) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{(n)}(0^+) \frac{1}{s^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^+)$$

如果 $x(t)$ 是因果信号, 且在 $t = 0$ 不包含奇异函数,
则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$ ——终值定理

求象函数 $F(s) = \frac{(s-1)^2}{s^2+3s+3}$ 的原函数 $f(t)$ 的初值 $f(0_+)$ 和终值 $f(\infty)$ 。

解：由于 $F(s) = \frac{(s-1)^2}{s^2+3s+3}$ 为假分式，首先化为真分式才能利用初值定理，
则

$$F(s) = 1 + \frac{-5s-2}{s^2+3s+3} = 1 + F_1(s)$$

$$f(0_+) = f_1(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_1(s) = -5$$

由于 $F(s)$ 的极点均在 s 的左半平面，所以终值存在。其终值为：

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = 0$$

用拉氏变换分析与表征LTI系统

□系统函数

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

其中 $H(s)$ 是 $h(t)$ 的拉氏变换，称为系统函数或转移函数、传递函数。

$H(s)$ 零、极点与 $h(t)$ 波形特征的对应

1. 系统函数的零、极点

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_j) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_k) \cdots (s - p_n)}$$
$$= K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)}$$

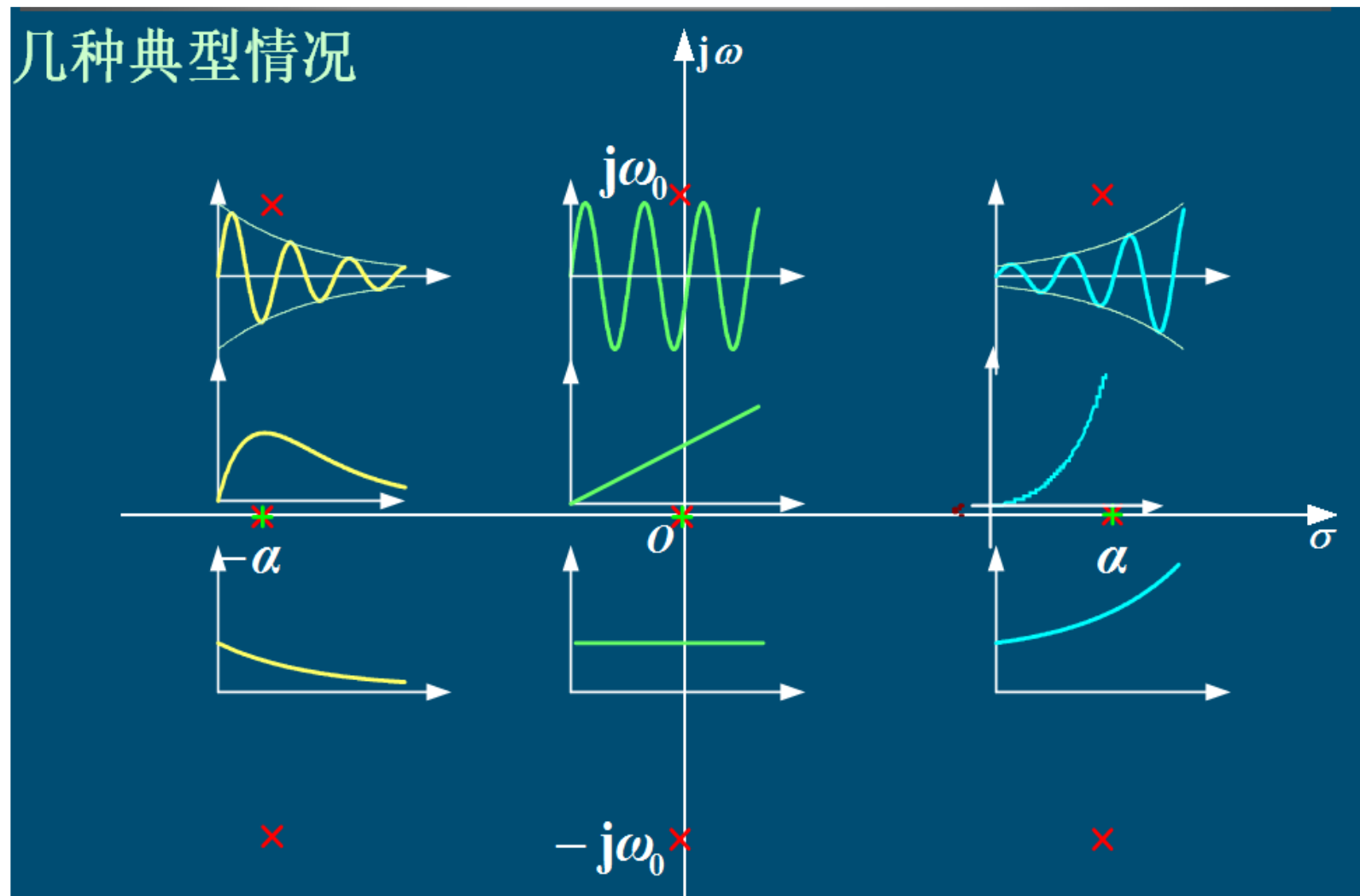
$z_1, z_2 \cdots z_n$
系统函数的零点

$p_1, p_2 \cdots p_n$
系统函数的极点

在 s 平面上，画出 $H(s)$ 的零极点图：

极点：用 $\times$ 表示，零点：用 $\circ$ 表示

$H(s)$ 极点分布与原函数的对应关系



一阶极点

$$H(s) = \frac{1}{s}, \quad p_1 = 0 \text{ 在原点}, \quad h(t) = L^{-1}[H(s)] = u(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s+a}, \quad p_1 = -a$$

$a > 0$, 在左实轴上, $h(t) = e^{-at} u(t)$, 指数衰减

$a < 0$, 在右实轴上, $h(t) = e^{-at} u(t)$, $-a > 0$, 指数增加

$$H(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad p_1 = j\omega, \text{ 在虚轴上}$$

$h(t) = \sin \omega t u(t)$, 等幅振荡

$$H(s) = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}, \quad p_1 = -\alpha + j\omega, p_2 = -\alpha - j\omega, \text{ 共轭根}$$

当 $\alpha > 0$, 极点在左半平面, 衰减振荡

当 $\alpha < 0$, 极点在右半平面, 增幅振荡

二阶极点

$$H(s) = \frac{1}{s^2}, \text{极点在原点, } h(t) = tu(t), t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow \infty$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+a)^2}, \text{极点在实轴上:}$$

$$h(t) = t e^{-\alpha t} u(t), \alpha > 0, t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow 0$$

$$H(s) = \frac{2s}{(s^2 + \omega^2)^2}, \text{在虚轴上,}$$

$$h(t) = t \sin t u(t), t \rightarrow \infty, h(t) \text{ 增幅振荡}$$

有实际物理意义的物理系统都是因果系统，即随 $t \uparrow$, $h(t) \rightarrow 0$, $H(s)$ 这表明的极点位于左半平面，由此可知，收敛域包括虚轴， $X(s)$ 和 $X(j\omega)$ 均存在，两者可通用，只需 $s \rightarrow j\omega$ 将即可。

□用系统函数表征LTI系统

1. 因果性:

如果 $t < 0$ 时 $h(t) = 0$, 则系统是因果的。

□用系统函数表征LTI系统

一个因果系统的系统函数的ROC是某个右半平面。

ROC是某个右半平面，一定是因果系统？

例. 若有 $H(s) = \frac{e^s}{s+1}$, $\text{Re}[s] > -1$

$H(s)$ 的ROC是最右边极点的右边，但 $H(s)$ 是非有理函数 $h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1)$ ，系统是非因果的。

由于ROC包括 $j\omega$ 轴，该系统仍是稳定的。

□用系统函数表征LTI系统

系统函数的ROC不是某个右半平面，则一定不是因果系统？

有理型系统函数的ROC是最右边极点右边的平面，等效于系统的因果性。

□用系统函数表征LTI系统

2. 稳定性

如果系统稳定，则有 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ 。因此 $H(j\omega)$ 必存在。意味着 $H(s)$ 的ROC必然包括 $j\omega$ 轴。

3. 因果稳定性

因果稳定系统的 $H(s)$ ，其全部极点必须位于S平面的左半边（虚轴的左边）。

例1. 某系统的 $h(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$
显然该系统是因果的，确定系统的稳定性。

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}, \quad \text{ROC: } \text{Re}[s] > -1$$

显然，ROC是最右边极点的右边。

$\because$ ROC包括 $j\omega$ 轴 $\therefore$ 系统也是稳定的。

$H(s)$ 的全部极点都在s平面的左半边。

□由线性常系数微分方程表征LTI系统

对 $\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$ 做拉氏变换, 可得

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} = \frac{N(s)}{D(s)},$$

微分性质

是一个有理函数

收敛域如何确定?

- 1) 如果已知LCCDE描述的系统是因果的, 则 $H(s)$ 的ROC必是最右边极点的右边。
- 2) 如果已知LCCDE描述的系统是稳定的, 则 $H(s)$ 的ROC 必包括 $j\omega$ 轴。

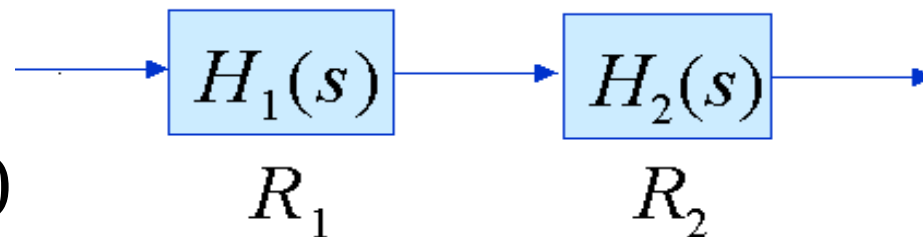
9.8 系统函数的代数属性与方框图表示

□ 系统互联时的系统函数

1. 级联:

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$$

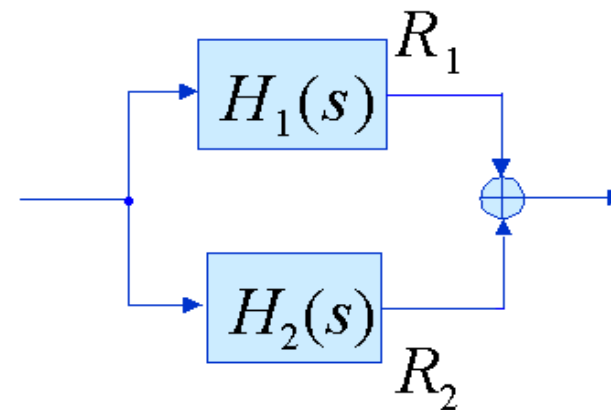
$$\text{ROC: 包括 } R_1 \cap R_2$$



2. 并联:

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

$$\text{ROC: 包括 } R_1 \cap R_2$$



9.8 系统函数的代数属性与方框图表示

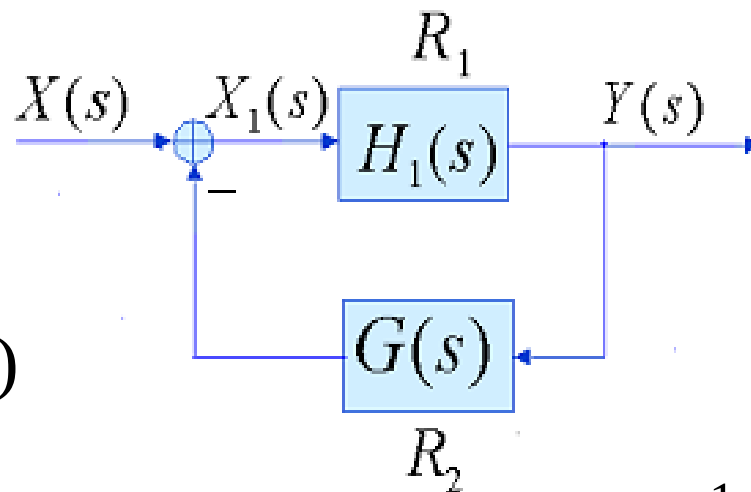
□ 系统互联时的系统函数

3. 反馈联结:

$$X_1(s) = X(s) - G(s)Y(s)$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= X_1(s)H_1(s) \\ &= [X(s) - G(s)Y(s)]H_1(s) \end{aligned}$$

$$\therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + G(s)H_1(s)} \quad \text{ROC: 包括 } R_1 \cap R_2$$



$$H(s) = \frac{1}{s+3} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{3}{s}}$$

9.8 系统函数的代数属性与方框图表示

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2} = \left(\frac{1}{s^2 + 3s + 2} \right) (2s^2 + 4s - 6)$$

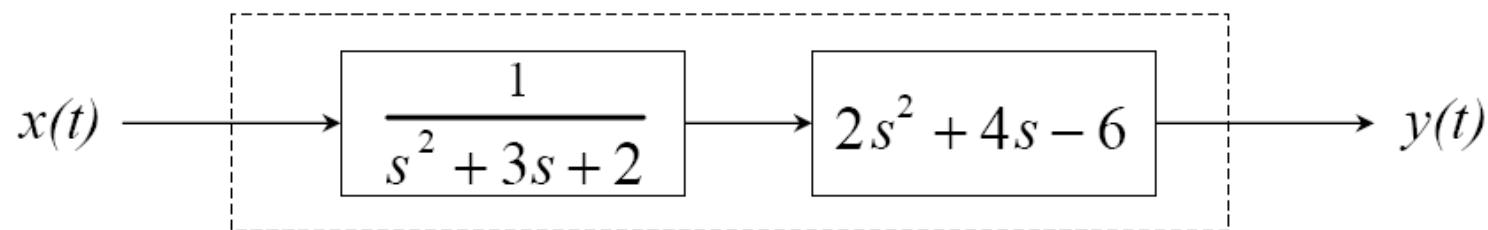
$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} X(s) \quad Y(s) = (2s^2 + 4s - 6)W(s)$$

$$\frac{d^2 w(t)}{dt^2} + 3 \frac{dw(t)}{dt} + 2w(t) = x(t), \quad y(t) = 2 \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + 4 \frac{dw(t)}{dt} - 6w(t)$$

9.8 系统函数的代数属性与方框图表示

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2} = \left(\frac{1}{s^2 + 3s + 2} \right) (2s^2 + 4s - 6)$$

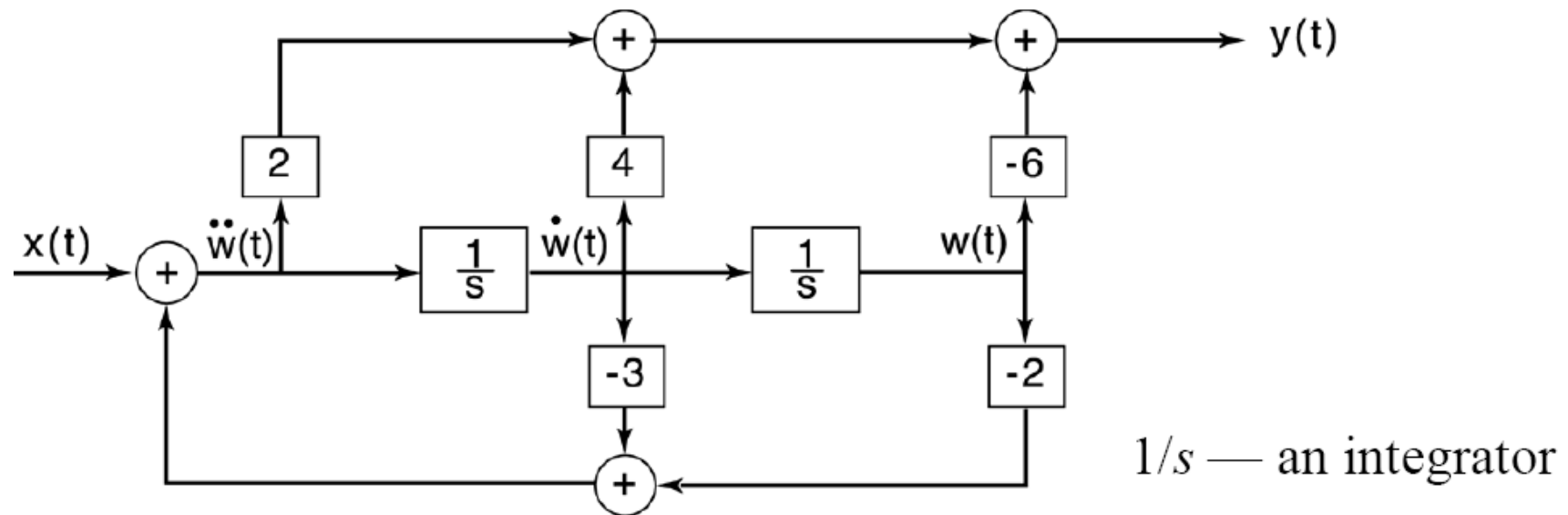
$H(s)$



9.8 系统函数的代数属性与方框图表示

$$\frac{d^2 w(t)}{dt^2} = x(t) - 3 \frac{dw(t)}{dt} - 2w(t)$$

$$y(t) = 2 \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + 4 \frac{dw(t)}{dt} - 6w(t)$$

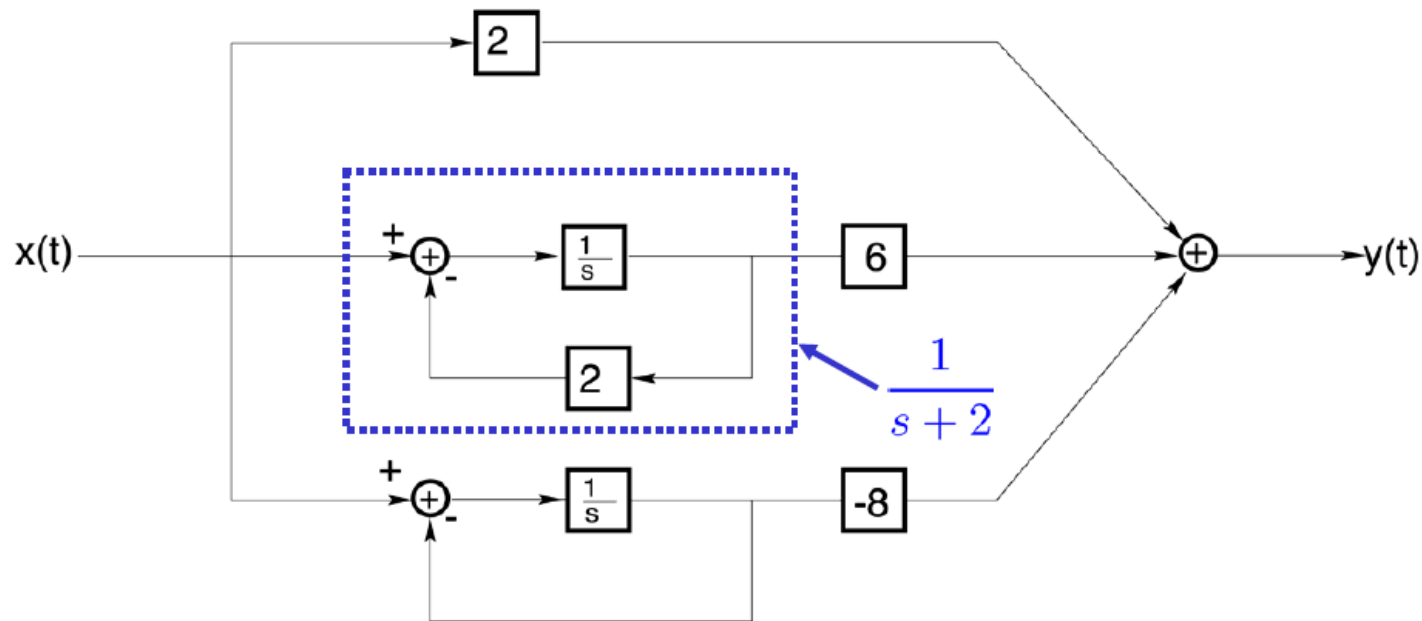


9.8

系统函数的代数属性与方框图表示

$$H(s) = \left[\frac{2(s-1)}{s+2} \right] \left[\frac{s+3}{s+1} \right] = \left[\frac{s+3}{s+2} \right] \left[\frac{2(s-1)}{s+1} \right] \quad - \text{ Cascade}$$

$$2 + \frac{6}{s+2} - \frac{8}{s+1} \quad - \text{ parallel connection}$$



9.9 单边拉普拉斯变换

积分区间不同

□定义

$$\chi(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

起始状态 0^- 信号加入之前的状态

初始状态 0^+ 信号加入瞬间的状态

如果 $x(t)$ 是因果信号，对其做双边拉氏变换和做单边拉氏变换是完全相同的。

9.9 单边拉普拉斯变换

□定义

单边拉氏变换也同样存在ROC。其ROC必然遵从因果信号双边拉氏变换时的要求，即：**一定位于最右边极点的右边。**

正因为这一原因，在讨论单边拉氏变换时，一般不再强调其ROC。

单边拉氏变换的反变换：

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(s)e^{st} ds & t > 0 \end{cases}$$

9.9 单边拉普拉斯变换

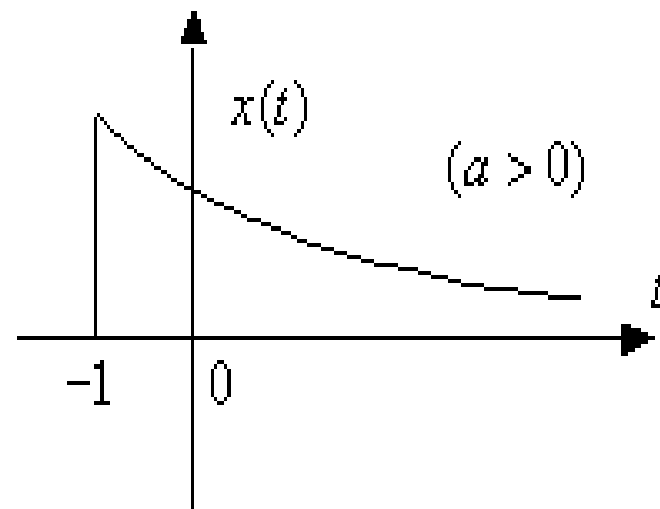
例1. $x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$

做双边拉氏变换:

$$X(s) = \frac{1}{s+a} e^s \quad \text{Re}[s] > -a$$

做单边拉氏变换:

$$\begin{aligned} \chi(s) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-a(t+1)} e^{-st} dt \\ &= e^{-a} \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a} e^{-a} \quad \text{Re}[s] > -a \end{aligned}$$



9.9 单边拉普拉斯变换

$X(s)$ 与 $\chi(s)$ 不同，是因为 $x(t)$ 在 $t < 0$ 的部分对 $X(s)$ 有作用，而对 $\chi(s)$ 没有任何作用所致。

9.9 单边拉普拉斯变换

□性质

单边拉氏变换的大部分性质与双边拉氏变换相同，但也有几个不同的性质。

1. 时域微分 (Differentiation in the Time Domain)

若 $x(t) \leftrightarrow \chi(s)$ 则 $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow s\chi(s) - x(0^-)$

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = s\chi(s) - x(0^-)$$
$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2 \chi(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

9.9 单边拉普拉斯变换

2. 时域积分 (Integration in the Time Domain)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau &\leftrightarrow \frac{1}{s} \chi(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau \\ \because \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau + \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \quad (t > 0) \\ \therefore \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau \cdot \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt + \int_{0^-}^{\infty} \left(\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \right) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau - \frac{e^{-st}}{s} \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \Big|_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau + \frac{1}{s} \chi(s)\end{aligned}$$

9.9 单边拉普拉斯变换

3. 时延性质 (Time Shifting)

$x(t)$ 是因果信号时，单边拉氏变换的时延特性与双边变换时一致。

若 $x(t)u(t) \leftrightarrow \chi(s)$

则 $x(t - t_0)u(t - t_0) \leftrightarrow \chi(s)e^{-st_0} \quad (t_0 > 0)$

9.9 单边拉普拉斯变换

3. 时延性质 (Time Shifting)

$x(t)$ 不是因果信号时,

$$\begin{aligned}x(t - t_0) &\leftrightarrow \int_{0^-}^{\infty} x(t - t_0) e^{-st} dt = \int_{-t_0}^{\infty} x(\tau) e^{-s(\tau+t_0)} d\tau \\&= \int_{-t_0}^{0^-} x(\tau) e^{-s(\tau+t_0)} d\tau + \int_{0^-}^{\infty} x(\tau) e^{-s(\tau+t_0)} d\tau \\&= \chi(s) e^{-st_0} + \int_{0^-}^{t_0} x(t - t_0) e^{-st} dt\end{aligned}$$

9.9 单边拉普拉斯变换

例. 某LTI系统由微分方程描述

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t), \quad x(t) = 2u(t),$$

$$y(0^-) = 3, \quad y'(0^-) = -5 \quad \text{求响应 } y(t)$$

解: 对方程两边做单边拉氏变换:

$$\begin{aligned} & \left[s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) \right] + \\ & 3[sY(s) - y(0^-)] + 2Y(s) = \frac{2}{s} \end{aligned}$$

9.9 单边拉普拉斯变换

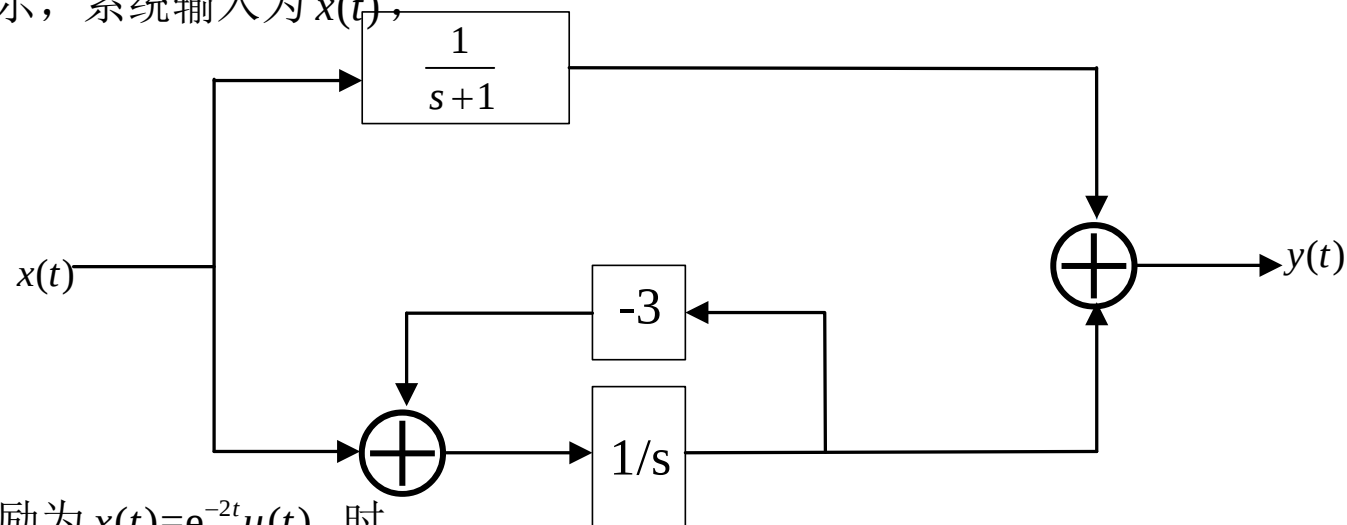
代入 $y(0^-) = 3, \quad y'(0^-) = -5$ 可得:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{3(s+3)}{s^2+3s+2} + \frac{-5}{s^2+3s+2}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\frac{2}{s(s^2+3s+2)}}_{\text{零状态响应}}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3s+4}{s^2+3s+2} + \frac{2}{s(s^2+3s+2)} = \frac{3s^2+4s+2}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \quad \therefore y(t) = (1 - e^{-t} + 3e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

已知某**因果**连续时间线性时不变系统的框图如图所示，系统输入为 $x(t)$ ，输出为 $y(t)$ ，求解下列各题。

- (1) 试写出该系统的系统函数 $H(s)$ ；
- (2) 试写出表示该系统的常系数线性微分方程；
- (3) 试求该系统的单位冲激响应 $h(t)$ ；
- (4) 若系统的起始状态 $y(0^-)=1$ ， $y'(0^-)=-3$ ，当输入激励为 $x(t)=e^{-2t}u(t)$ 时，



试求该系统的全响应 $y(t)$ 。

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+3)} = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}$$

$$H(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$(s^2+4s+3)Y(s) = (2s+4)X(s)$$

两边同时做双边拉普拉斯逆变换

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 4 \frac{d}{dt} y(t) + 3y(t) = 2 \frac{d}{dt} x(t) + 4x(t)$$

对微分方程两端做单边拉普拉斯逆变换

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 4 \frac{d}{dt} y(t) + 3y(t) = 2 \frac{d}{dt} x(t) + 4x(t)$$

$$s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 4sY(s) - 4y(0^-) + 3Y(s) = (2s + 4)X(s)$$

$$\text{代入 } X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad y(0^-) = 1, \quad y'(0^-) = -3$$

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) = 2 + (s + 4) - 3$$

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+3} = \frac{1}{s+1}$$

$$y(t) = e^{-t}u(t)$$

9.9 小结

❖ 拉氏变换是傅氏变换的推广，在LTI系统分析中特别有用。它可以将微分方程变为代数方程，这对分析系统互联、系统结构、用系统函数表征系统、分析系统特性等都具有重要意义。

❖ ROC 是双边拉氏变换的重要概念。离开了收敛域ROC，信号与双边拉氏变换的表达式将不再有一一对应的关系。

9.9 小结

❖ 作为拉氏变换的几何表示，零极点图对分析系统的频率特性、零极点分布与系统特性的关系具有重要意义。从本质上讲，系统的特性完全是由系统函数的零极点分布决定的。

❖ 拉氏变换的许多性质对于在变换域分析LTI系统，具有重要作用。