

第6章 信号与系统的时域和频域特性

6.0 引言

- 在时域，系统的特性由 $h(t)$ 或 $h[n]$ 描述；
- 在频域，系统的特性由 $H(j\omega)$ 或 $H(e^{j\omega})$ 描述；
- 在LTI 系统分析中，由于时域中的微分（差分）方程和卷积运算在频域都变成了代数运算，所以利用频域分析往往特别方便。
- 系统的时域特性与频域特性是相互制约的。在进行系统的分析与设计时，要权衡考虑系统的时域与频域特性

6.1 傅里叶变换的模和相位表示

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\angle X(j\omega)} \quad X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

这说明：一个信号所携带的全部信息分别包含在其频谱的模和相位中。

因此，导致信号失真的原因有两种：

- 1. 幅度失真：由于频谱的模改变而引起的失真。**
- 2. 相位失真：由于频谱的相位改变引起的失真。**

6.2 LTI系统频率响应的模和相位的表示

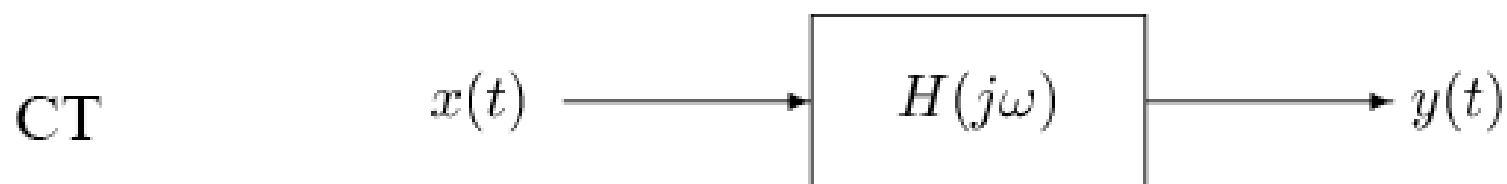
□ LTI系统的作用

LTI系统对输入信号所起的作用包括两个方面:

1. 改变输入信号各频率分量的幅度;
2. 改变输入信号各频率分量的相对相位。

□ 线性与非线性相位

线性相位——相移与频率 ω 成线性关系



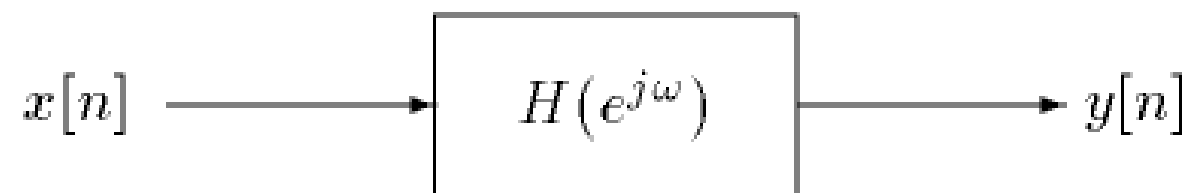
$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \quad |H(j\omega)| = 1, \quad \angle H(j\omega) = -\omega t_0$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

$$y(t) = x(t - t_0)$$

线性相位——相移与频率 ω 成线性关系

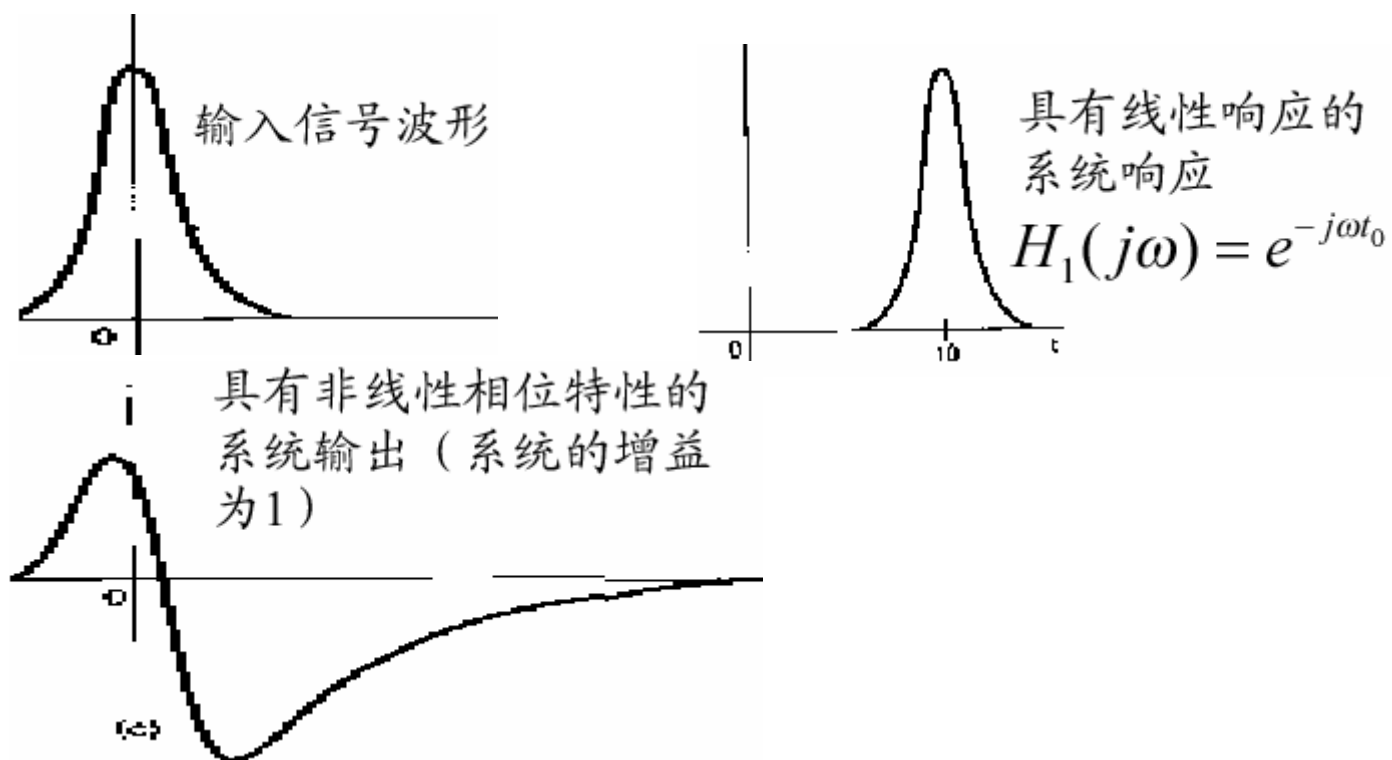
DT

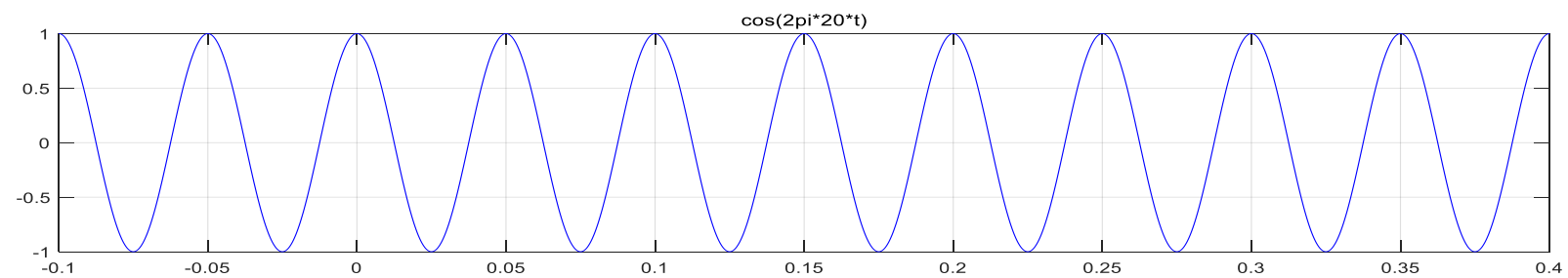
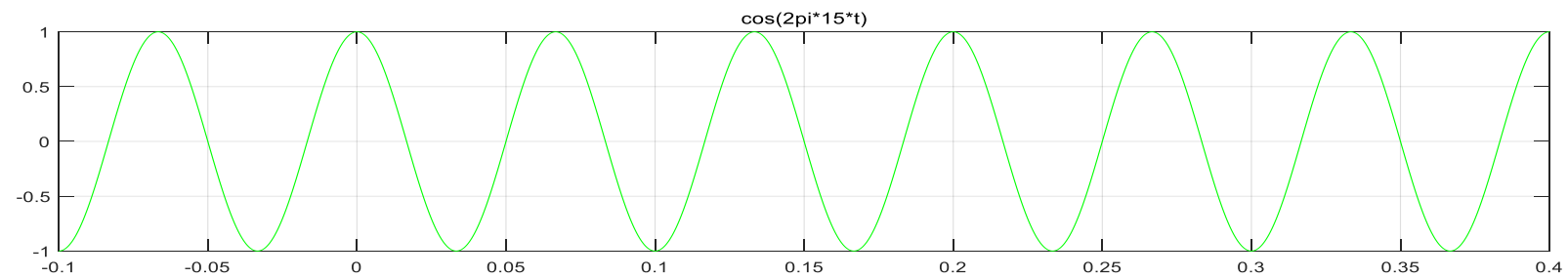
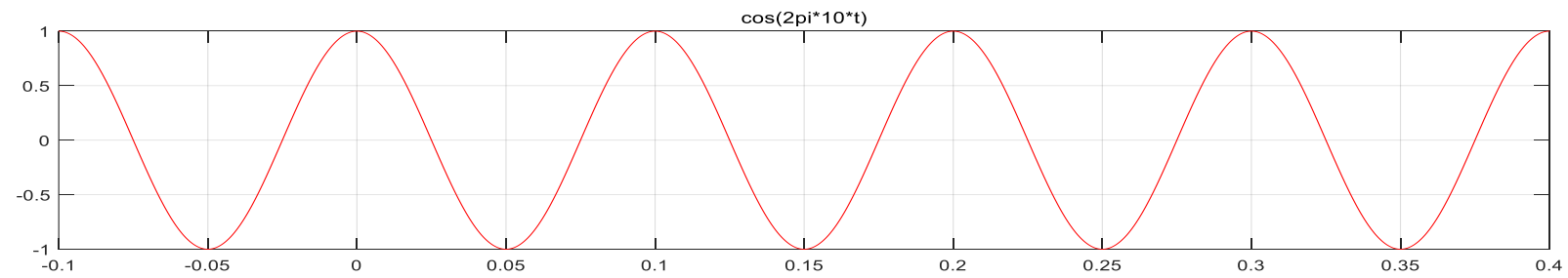


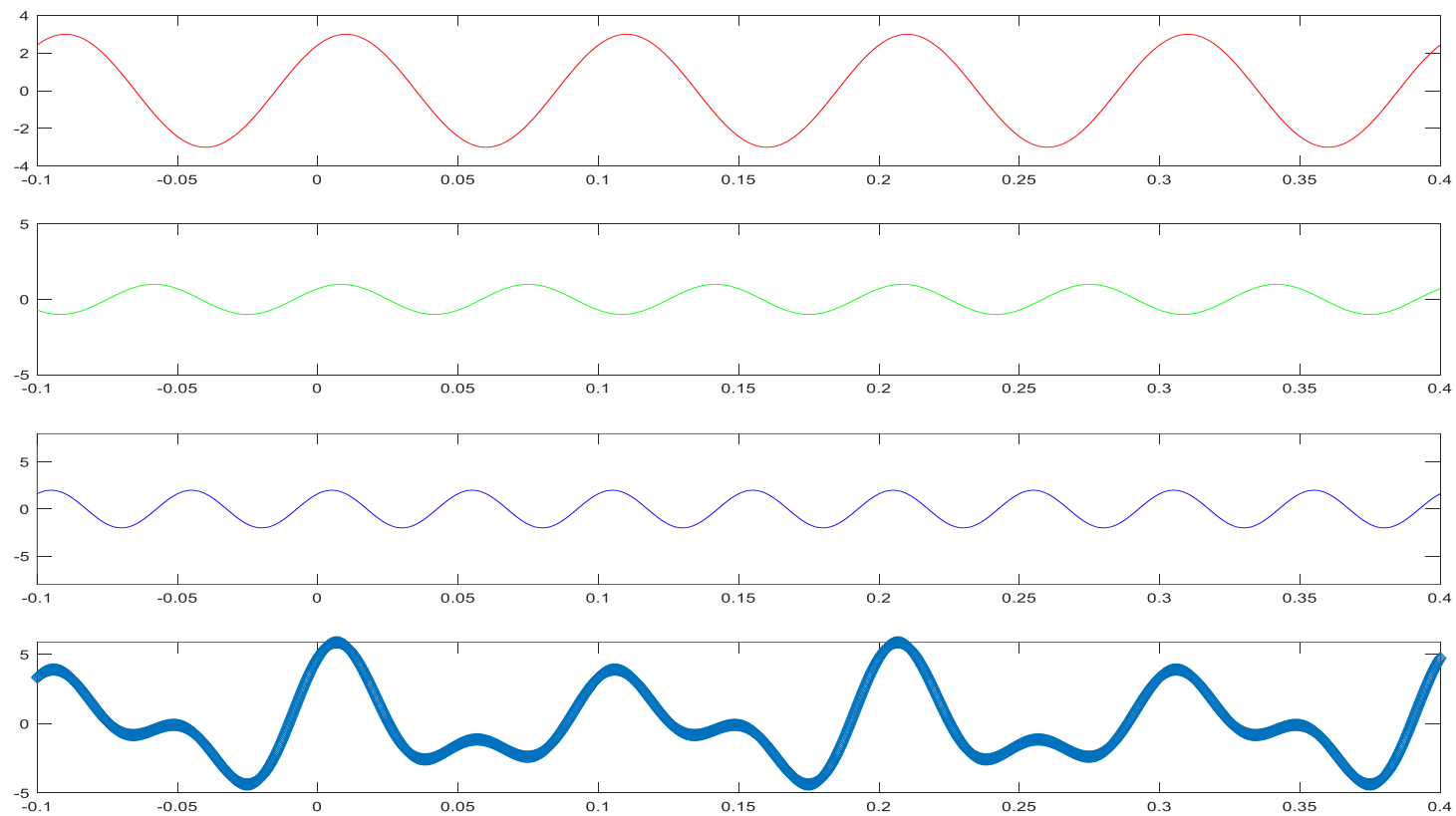
$$y[n] = x[n - n_0] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \Rightarrow |H(e^{j\omega})| = 1, \quad \angle H(e^{j\omega}) = -n_0\omega$$

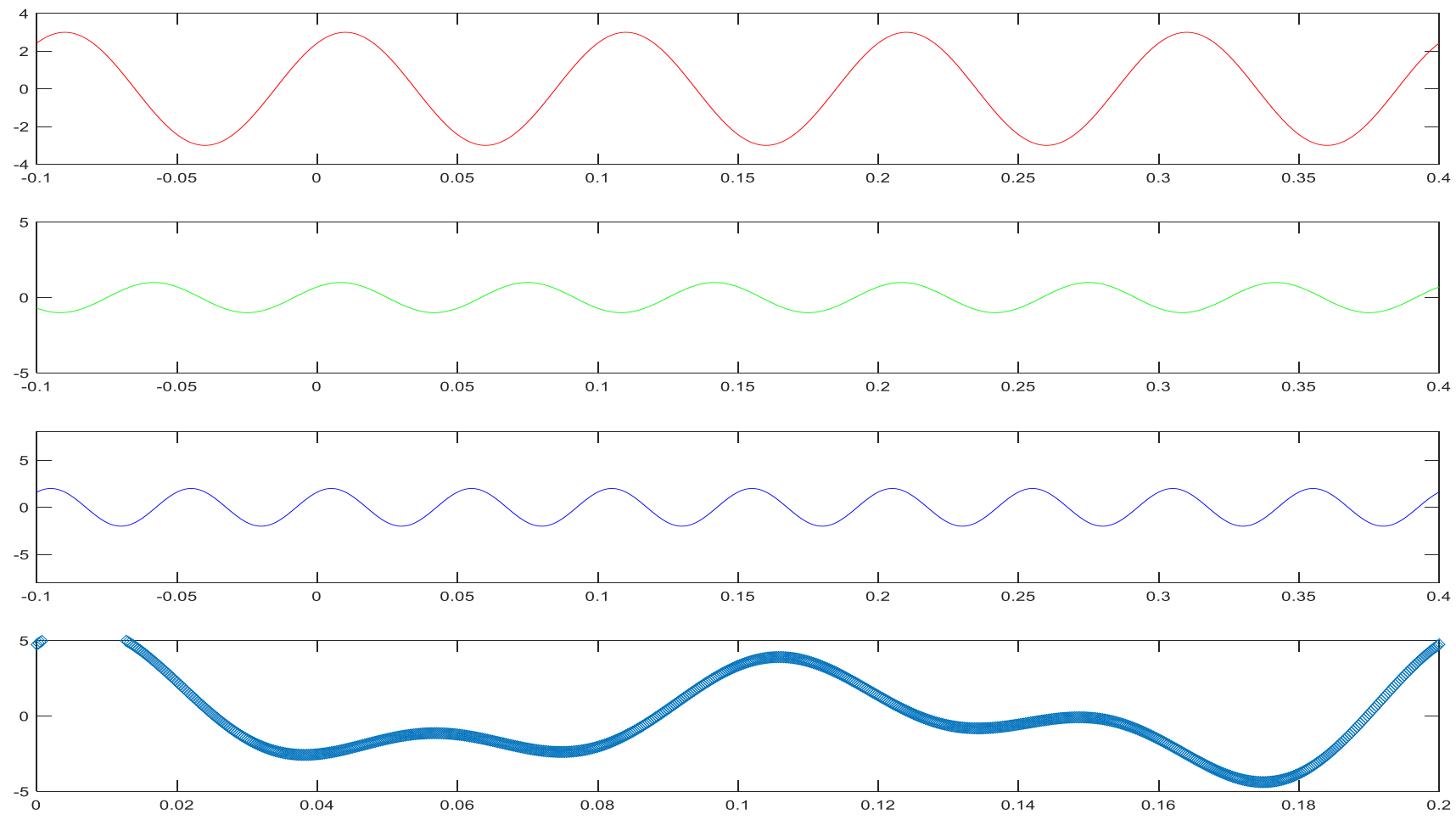
非线性相位——相移与频率 ω 成非线性关系

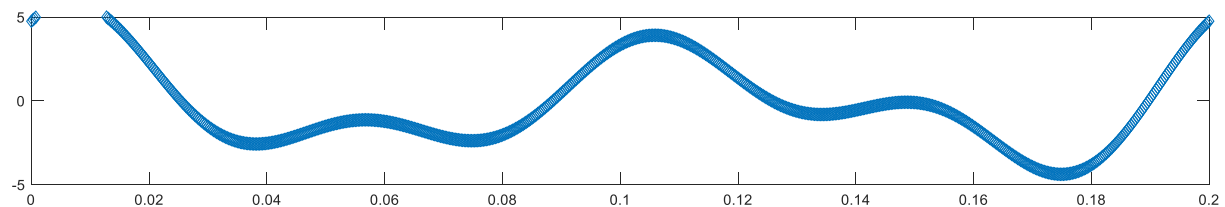
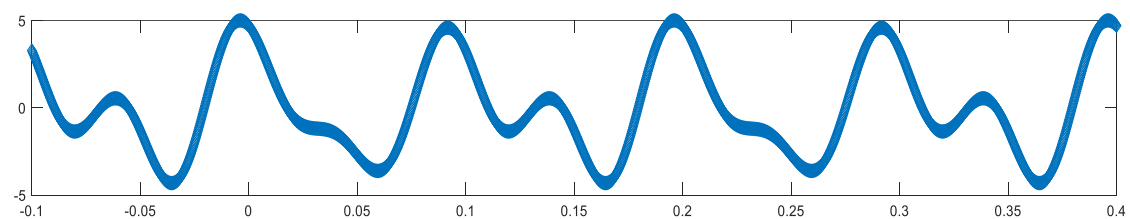
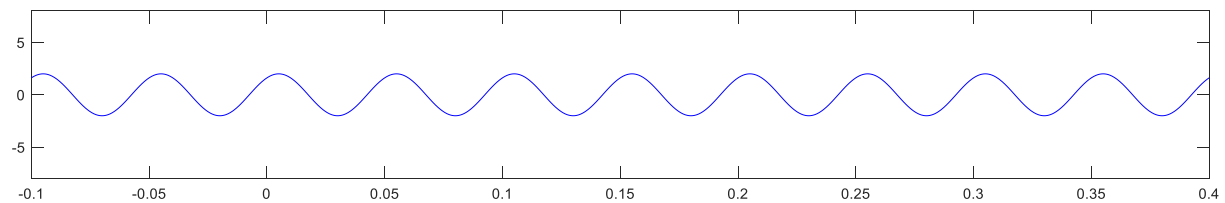
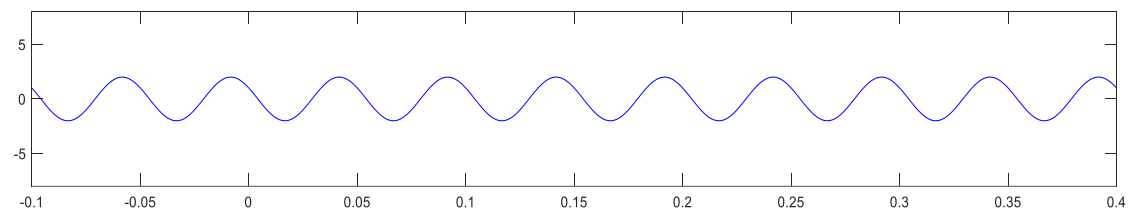
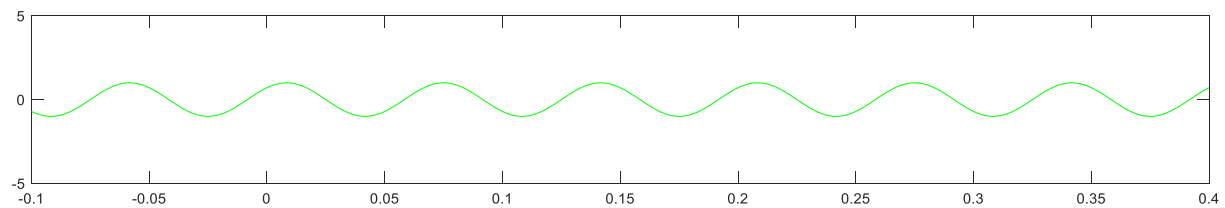
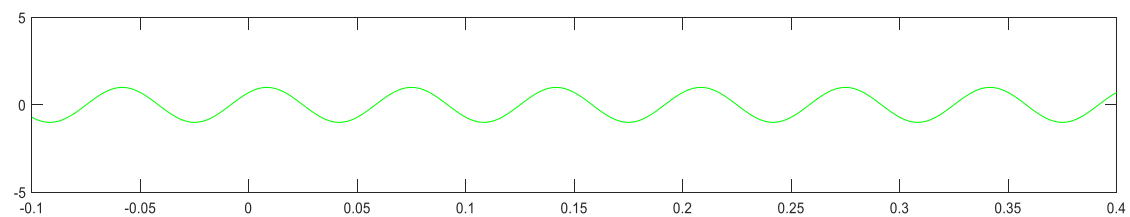
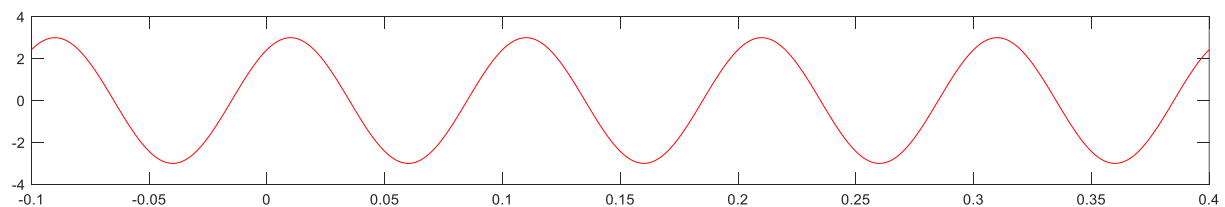
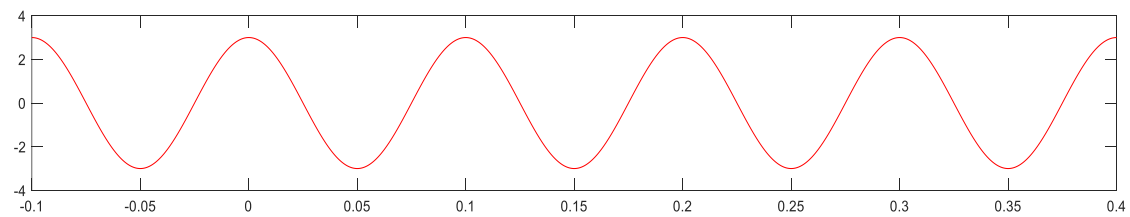






$$x=3\cos(h \cdot 10 \cdot t - \pi/5) + \cos(h \cdot 15 \cdot t - \pi/4) + 2\cos(h \cdot 20 \cdot t - \pi/5)$$





假定: $|H(e^{j\omega})| = 1$ $\angle H(e^{j\omega}) = -k\omega$

对输入 $x(n)$, 有

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\ &= |X(e^{j\omega})|e^{j[\varphi_x(\omega) - k\omega]} \end{aligned}$$

所以: $y(n) = x(n - k)$

输出是输入的简单移位, 移位的大小正比于 k , 因此不会发生失真。

例：令 $H(e^{j\omega}) = e^{-jk\omega}$  具有线性相位

$$x(n) = \cos(\omega_0 n) + \cos(2\omega_0 n)$$

则：

$$y_1(n) = \cos(\omega_0(n-k)) + \cos(2\omega_0(n-k))$$



没有发生相位失真

例：令 $H(e^{j\omega}) = e^{-j\beta(e^{j\omega})}$

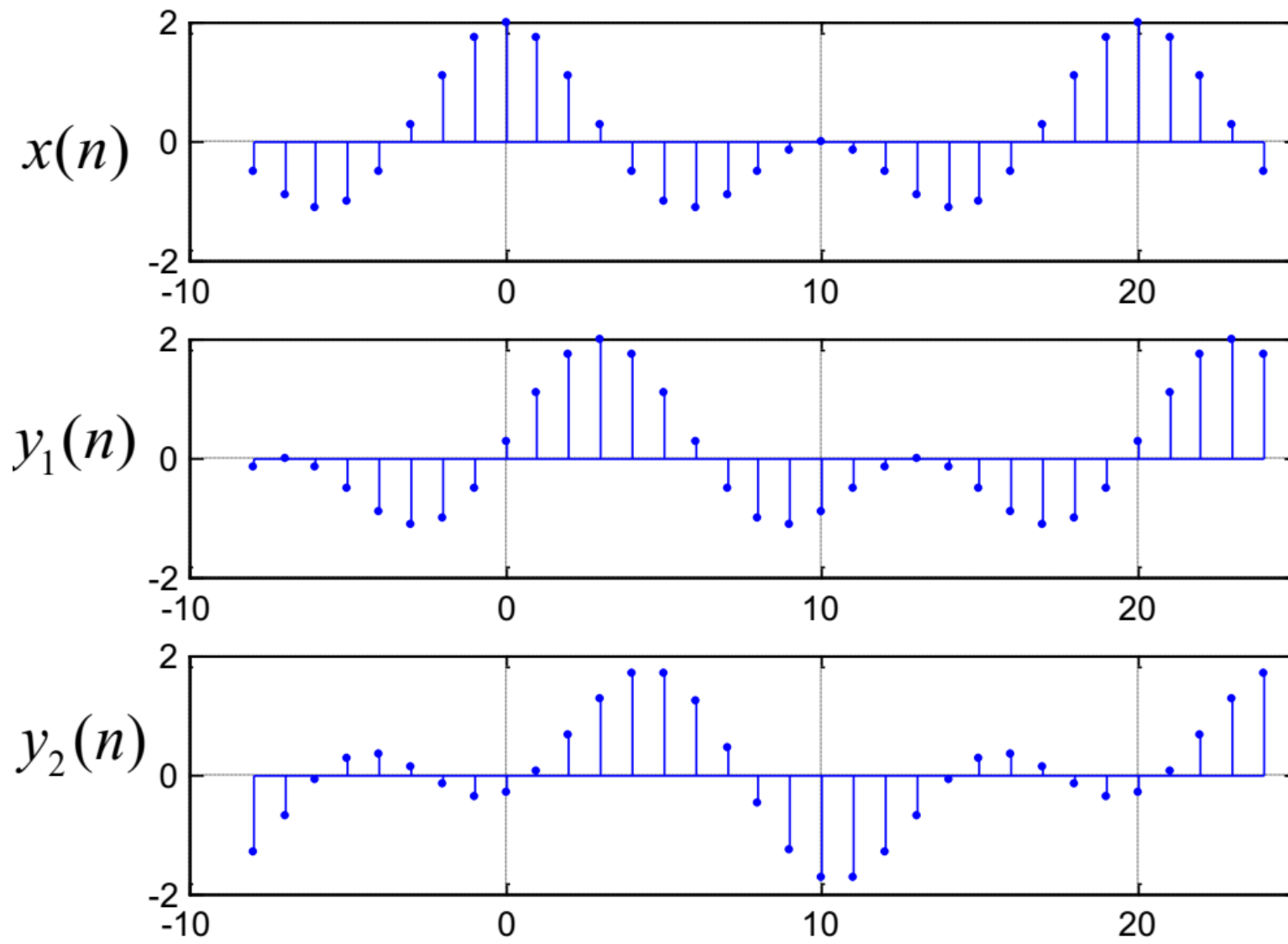
$$x(n) = \cos(\omega_0 n) + \cos(2\omega_0 n)$$

若： $\beta(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\pi / 4 & 0 \leq \omega \leq 3\omega_0 / 2 \\ -\pi & 3\omega_0 / 2 < \omega \leq \pi \end{cases}$

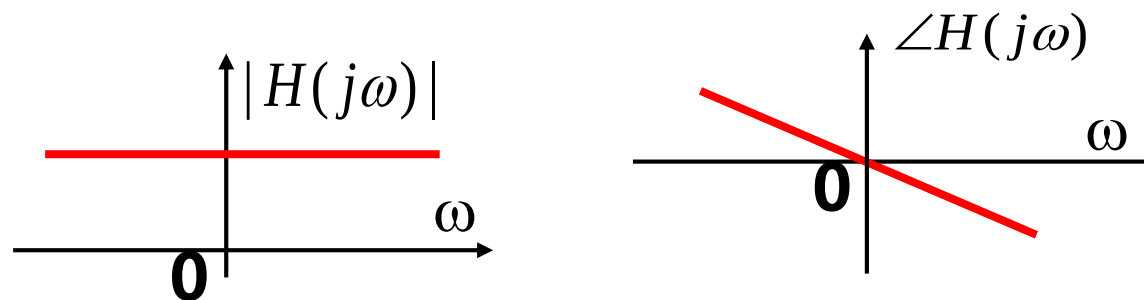
则： $y_2(n) = \cos(\omega_0 n - \pi / 4) + \cos(2\omega_0 n - \pi)$



发生了相位失真



□ 信号传输不失真的条件



$$|H(j\omega)| = k, \quad \angle H(j\omega) = -\omega t_0$$

$$h(t) = k\delta(t - t_0) \quad \text{——时域表征}$$

$$H(j\omega) = ke^{-j\omega t_0}, \quad \text{——频域表征}$$

频谱图

几点认识：

- 要求幅度为与频率无关的常数 K ，系统的通频带为无限宽。
- 相位特性与 $|\omega|$ 成正比，是一条过原点的负斜率直线
- 不失真的线性系统其冲激响应也是冲激函数。
- 线性系统的失真——幅度，相位变化，不产生新的频率
- 非线性系统产生非线性失真——产生新的频率成分。

□ 全通系统

All-Pass Systems

$$\Rightarrow |H(j\omega)| = |H(e^{j\omega})| = 1$$

$$H(j\omega) = e^{-j\alpha\omega} \quad - \text{Linear phase}$$

$$H(j\omega) = \frac{\alpha - j\omega}{\alpha + j\omega} \quad - \text{Nonlinear phase}$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \omega^2}{\alpha^2 + \omega^2}} = 1$$

□ 全通系统

All-Pass Systems

$$\Rightarrow |H(j\omega)| = |H(e^{j\omega})| = 1$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \quad - \text{Linear phase}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad - \text{Nonlinear phase}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{(1 - 1/2 \cdot \cos \omega)^2 + (1/2 \cdot \sin \omega)^2}{(1 - 1/2 \cdot \cos \omega)^2 + (1/2 \cdot \sin \omega)^2}} = 1$$

□ 群延迟

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \{ \angle H(j\omega) \}$$

如果群延迟为常数，称滤波器具有线性相位。

$$\angle H_i(j\omega) = -2 \arctan\left[\frac{2\zeta(\omega/\omega_i)}{1-(\omega/\omega_i)^2}\right]$$

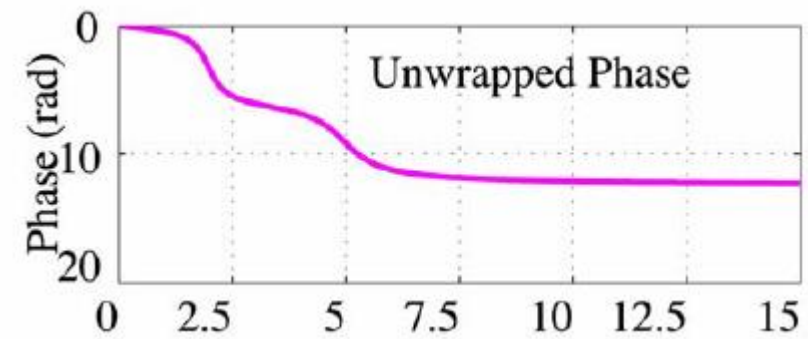
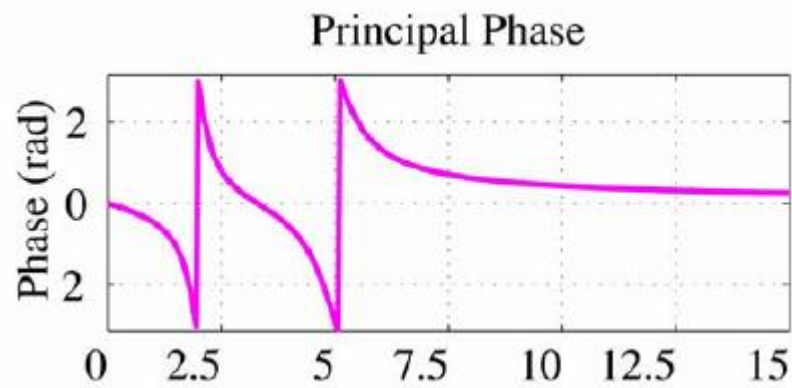
$$\angle H(j\omega) = \sum_{i=1}^3 \angle H_i(j\omega)$$

$$\omega_1 = 315 \text{ rad/s} \longrightarrow f_1 \approx 50 \text{ Hz};$$

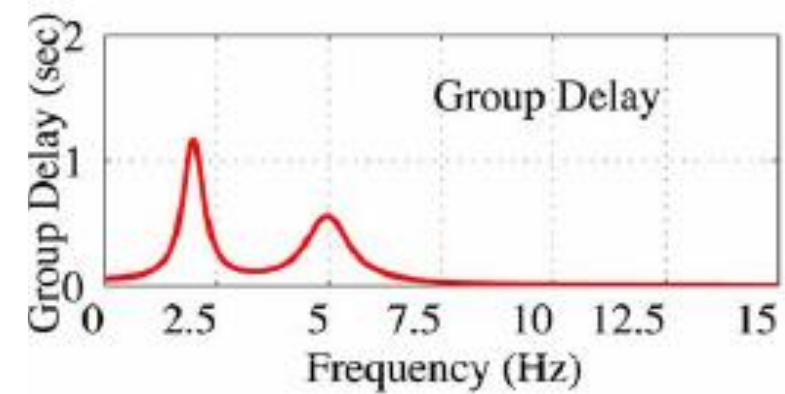
$$\omega_2 = 943 \text{ rad/s} \longrightarrow f_2 \approx 150 \text{ Hz};$$

$$\omega_3 = 1888 \text{ rad/s} \longrightarrow f_3 \approx 300 \text{ Hz}$$

主值相位函数:将 $\angle H(j\omega)$ 的值限制在 $-\pi \sim \pi$ 之间



$$-\frac{\angle H(j\omega)}{\omega}$$



考虑一个连续时间低通滤波器，其冲激响应为实值，且频率响应幅度由下式给定

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 200\pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

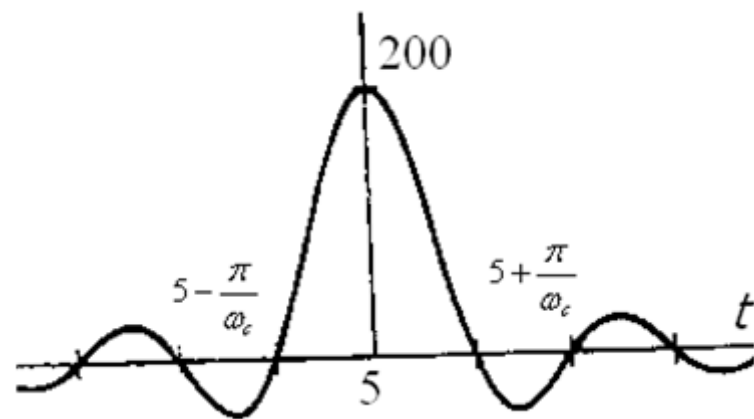
当该滤波器的群时延为 $\tau(\omega)=5$ 时，确定并画出其实值冲激响应 $h(t)$ 。

$$\tau(\omega) = 5 = \frac{-d\phi(\omega)}{d\omega} \quad \phi(\omega) = -5\omega$$

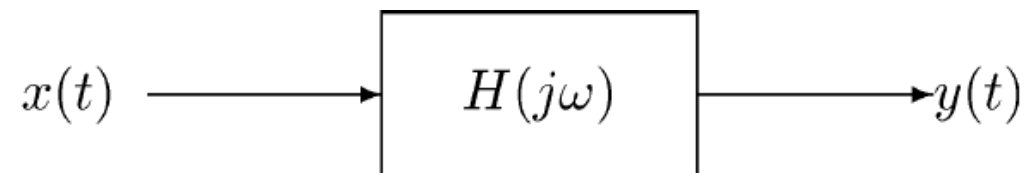
$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{-5j\omega} = [u(\omega + 200\pi) - u(\omega - 200\pi)] e^{-5j\omega}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \times e^{j\omega t} \times e^{-5j\omega} d\omega = 200 \text{Sa}[200\pi(t-5)]$$

$$\text{或 } h(t) = \frac{\sin[200\pi(t-5)]}{\pi(t-5)}$$



□ 对数模和波特图

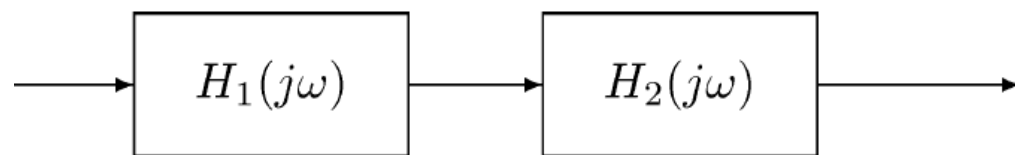


$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| \cdot |X(j\omega)|$$

$$\log |Y(j\omega)| = \log |H(j\omega)| + \log |X(j\omega)|$$

$$\angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(j\omega)$$

□ 对数模的优点



$$\begin{aligned}\log |H(j\omega)| &= \log |H_1(j\omega)| + \log |H_2(j\omega)| \\ \angle H(j\omega) &= \angle H_1(j\omega) + \angle H_2(j\omega)\end{aligned}$$

□ 对数模和波特图

$$\begin{aligned} |H(-j\omega)| &= |H(j\omega)| \\ \angle H(-j\omega) &= -\angle H(j\omega) \end{aligned}$$

对于处理实信号的系统：

- 1、连续系统---只需要画出 $\omega \geq 0$ 的部分（对称性）
- 2、离散系统---需要画出 $0 \leq \omega \leq \pi$ 的部分（周期性）
- 3、频率尺度为对数尺度，幅值为分贝表示

$$10 \log_{10} |H(j\omega)|^2 = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$



□ 对数模和波特图

$$|H(j\omega)| = 1 \quad \longrightarrow \quad 0 \text{ dB}$$

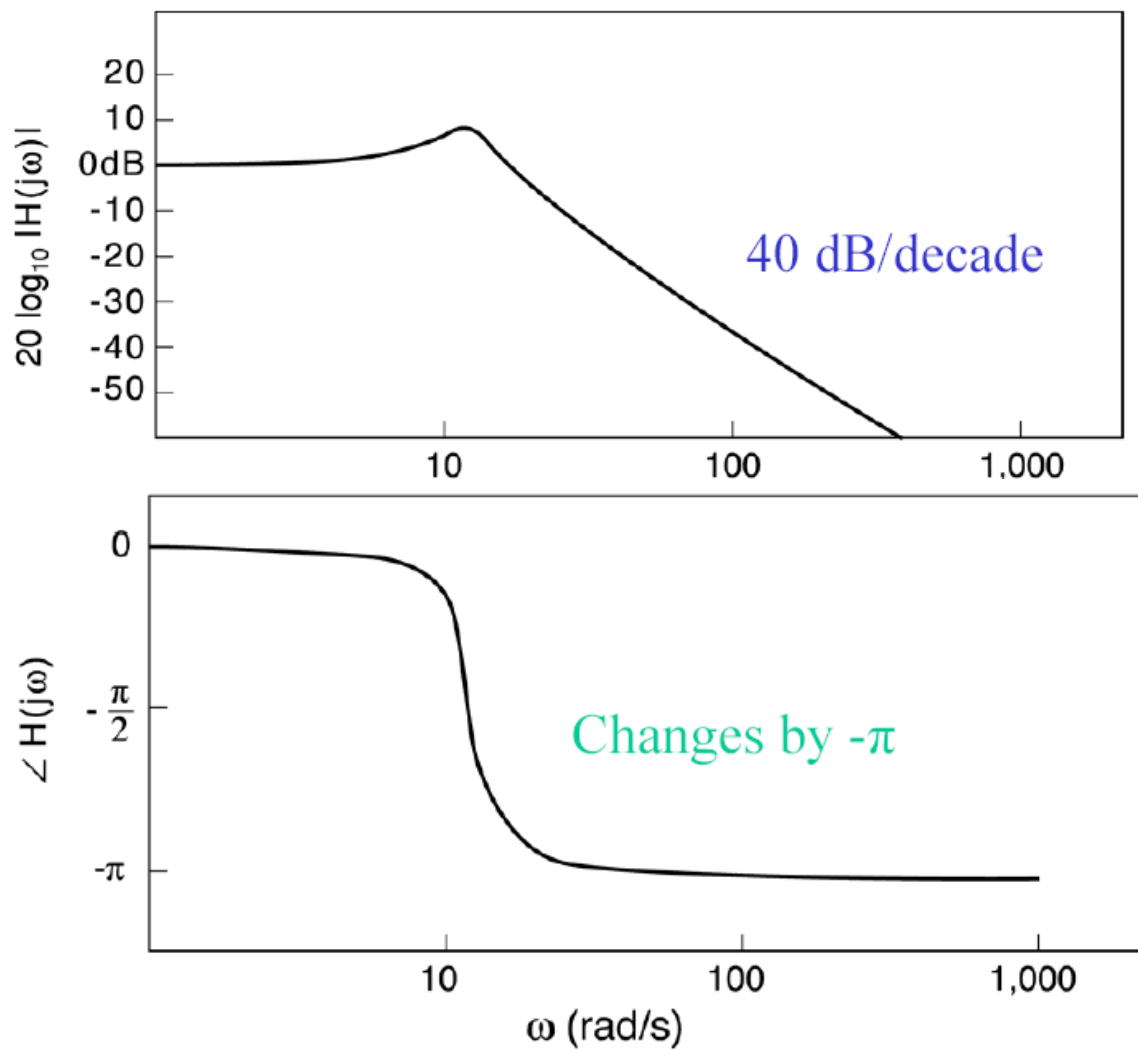
$$|H(j\omega)| = \sqrt{2} \quad \longrightarrow \quad \sim 3 \text{ dB}$$

$$|H(j\omega)| = 2 \quad \longrightarrow \quad \sim 6 \text{ dB}$$

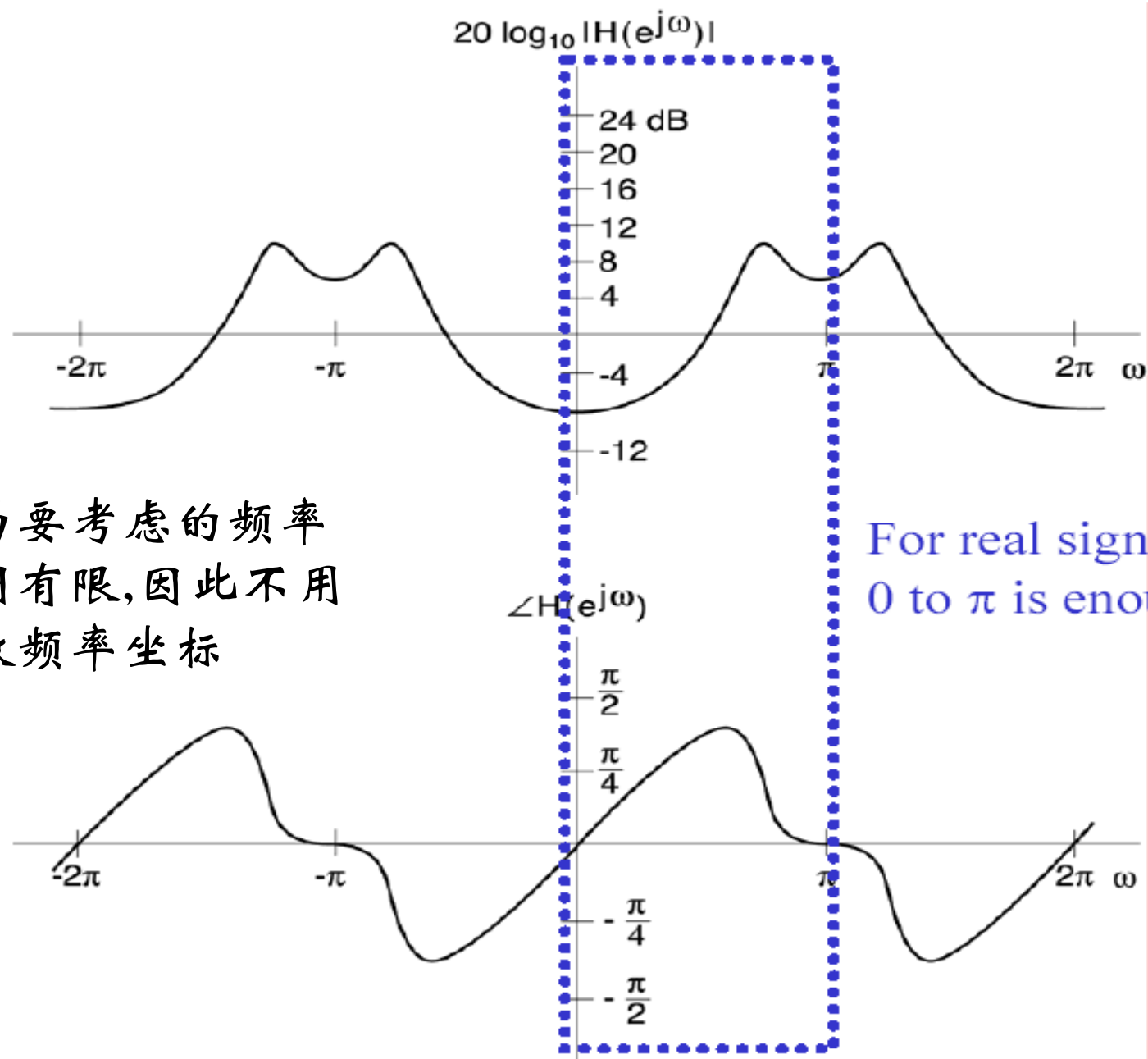
$$|H(j\omega)| = 10 \quad \longrightarrow \quad 20 \text{ dB}$$

$$|H(j\omega)| = 100 \quad \longrightarrow \quad 40 \text{ dB}$$

□ 一个典型的连续系统波特图



因为要考虑的频率
范围有限,因此不用
对数频率坐标



For real signals
0 to π is enough

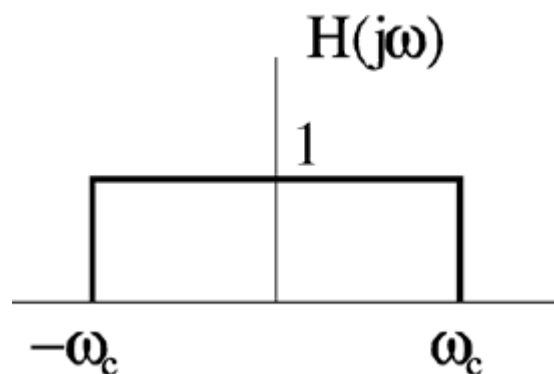
6.3 理想频率选择性滤波器的时域特性

□ 滤波

通过系统改变信号中各频率分量的相对大小和相位，甚至完全去除某些频率分量的过程称为**滤波**。

1. 频率成形滤波器（改变各分量的幅度与相位）
2. 频率选择性滤波器（去除某些频率分量）

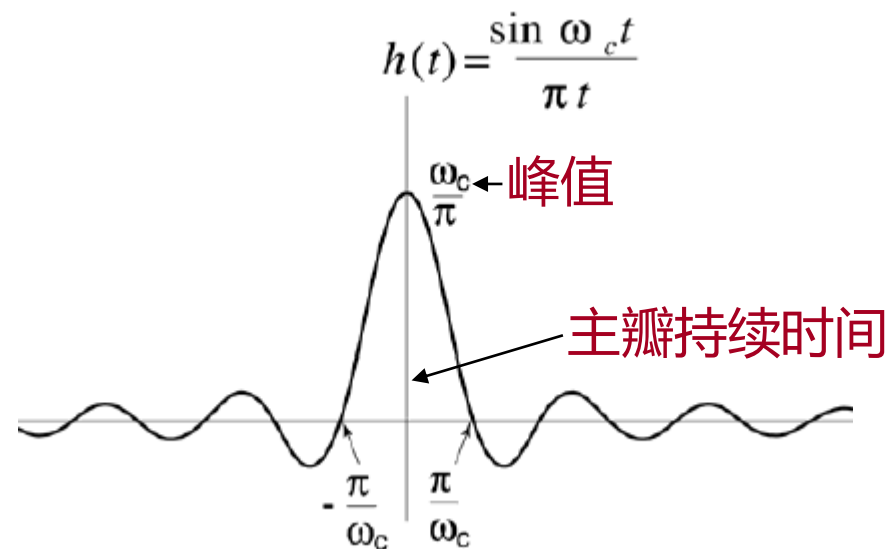
□ 连续理想低通滤波器



$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

零相位

单位增益



当 $\omega_c \rightarrow \infty$ 时, $h(t) \rightarrow \delta(t)$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t}$$

□ 连续理想低通滤波器-单位阶跃响应

$$\begin{aligned} s(t) &= h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c t} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c t} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

令 $\int_0^x \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \text{Si}(x)$ —— **正弦积分**

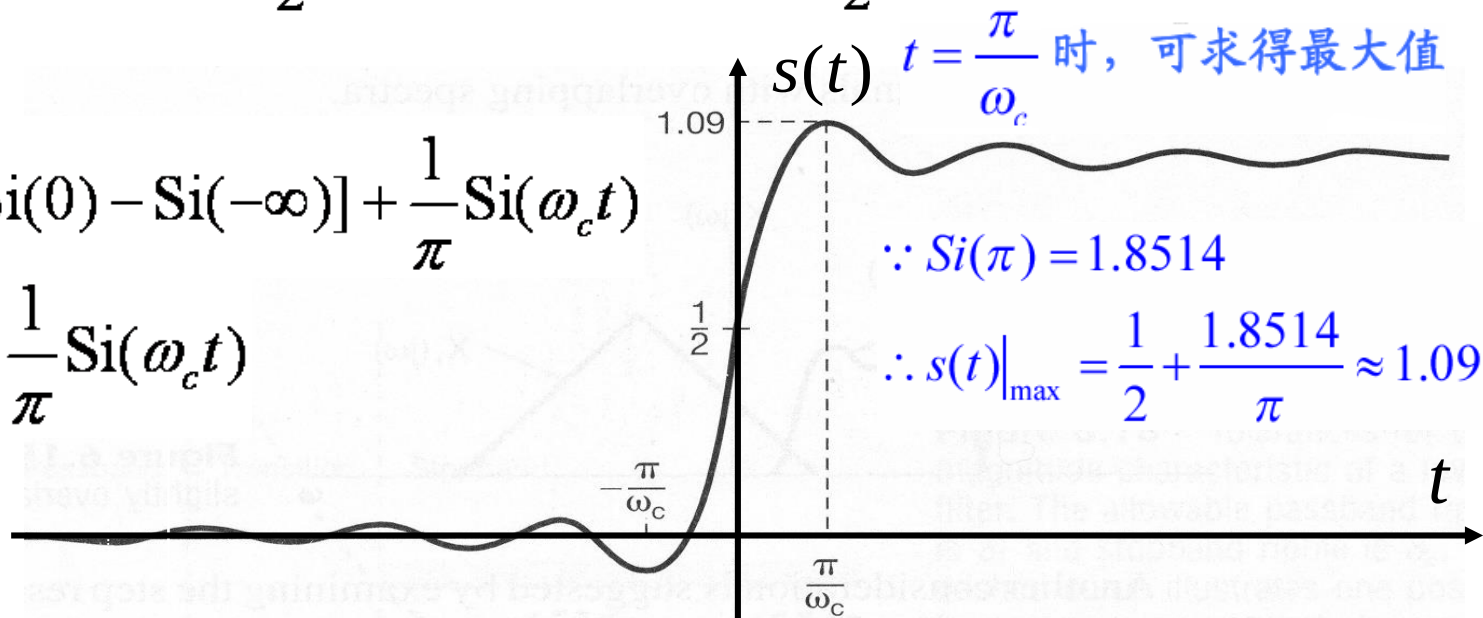
$$\text{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx = y - \frac{1}{3} \cdot \frac{y^3}{3!} + \frac{1}{5} \cdot \frac{y^5}{5!} - \dots$$

□ 连续理想低通滤波器-单位阶跃响应

阶跃响应的上升时间和滤波器带宽的关系？

$$x \rightarrow \infty, \text{Si}(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}; \quad x \rightarrow -\infty, \text{Si}(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \text{Si}(0) = 0$$

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{\pi} [\text{Si}(0) - \text{Si}(-\infty)] + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\omega_c t) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\omega_c t) \end{aligned}$$

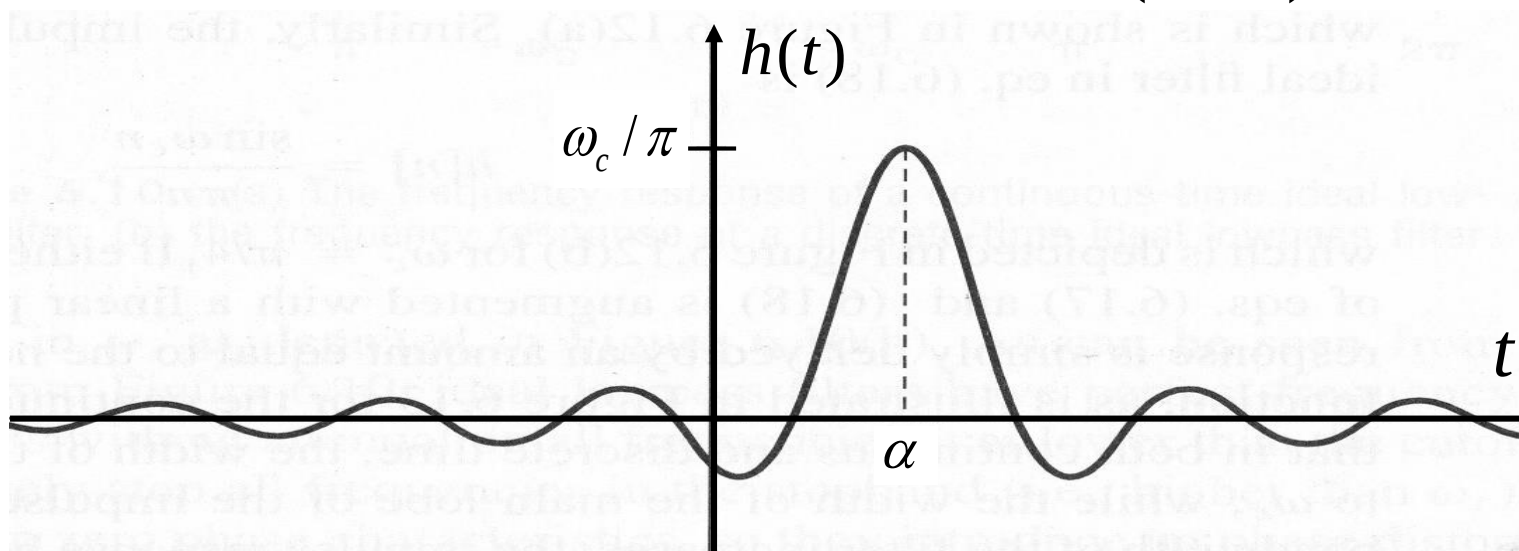


上升时间？

□ 连续理想低通滤波器-线性相位

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\alpha\omega}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

则
$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - \alpha)] = \frac{\sin \omega_c(t - \alpha)}{\pi(t - \alpha)}$$



□ 理想低通滤波器

- 1.理想滤波器是非因果系统。因而是物理不可实现的；
- 2.尽管从频域滤波的角度看，理想滤波器的频率特性是最佳的。但它们的时域特性并不是最佳的。 $h(t)$ 或 $h[n]$ 都有起伏、旁瓣、主瓣，这表明理想滤波器的时域特性与频域特性并不兼容。

6.4 非理想滤波器的讨论

理想滤波器特性	非理想滤波器特性
1.通带绝对平坦，通带内衰减为零。	通带内允许有起伏，有一定衰减范围 $\pm\delta_1$
2.阻带绝对平坦，阻带内衰减为 ∞ 。	阻带内允许有起伏，有一定衰减范围 δ_2
3.无过渡带。	有一定的过渡带宽度