第4章 连续时间傅里叶变换

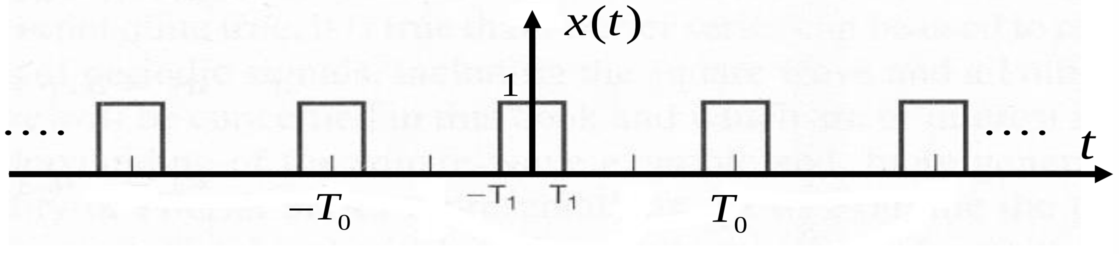
4.0 引言

- 周期信号和非周期信号的关系

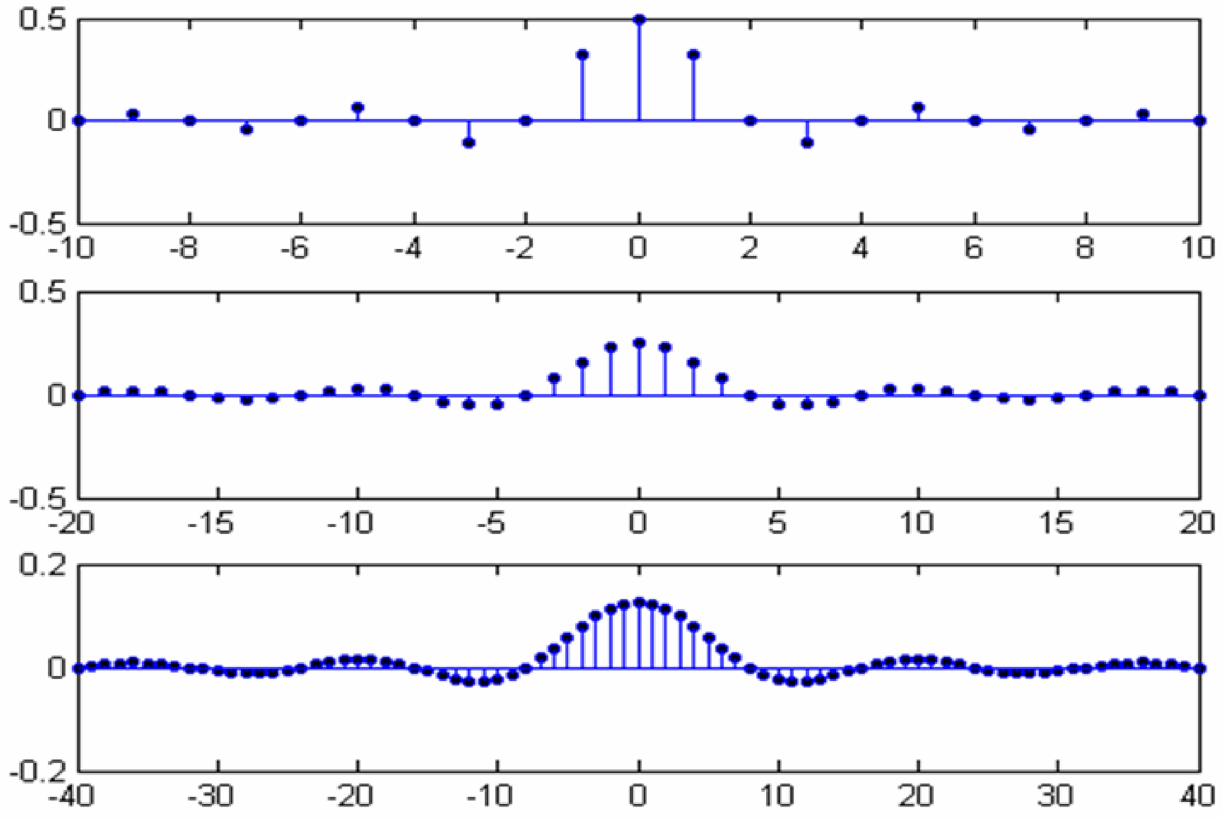
  - ✓ 如果一个周期信号的周期趋于无穷大，则周期信号将演变成一个非周期信号
  - ✓ 如果将任何非周期信号进行周期性延拓，就一定能形成一个周期信号

4.1 非周期信号的表示：连续时间傅里叶变换

从傅里叶级数到傅里叶变换



$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{2T_1}{T_0}\frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_1}$$



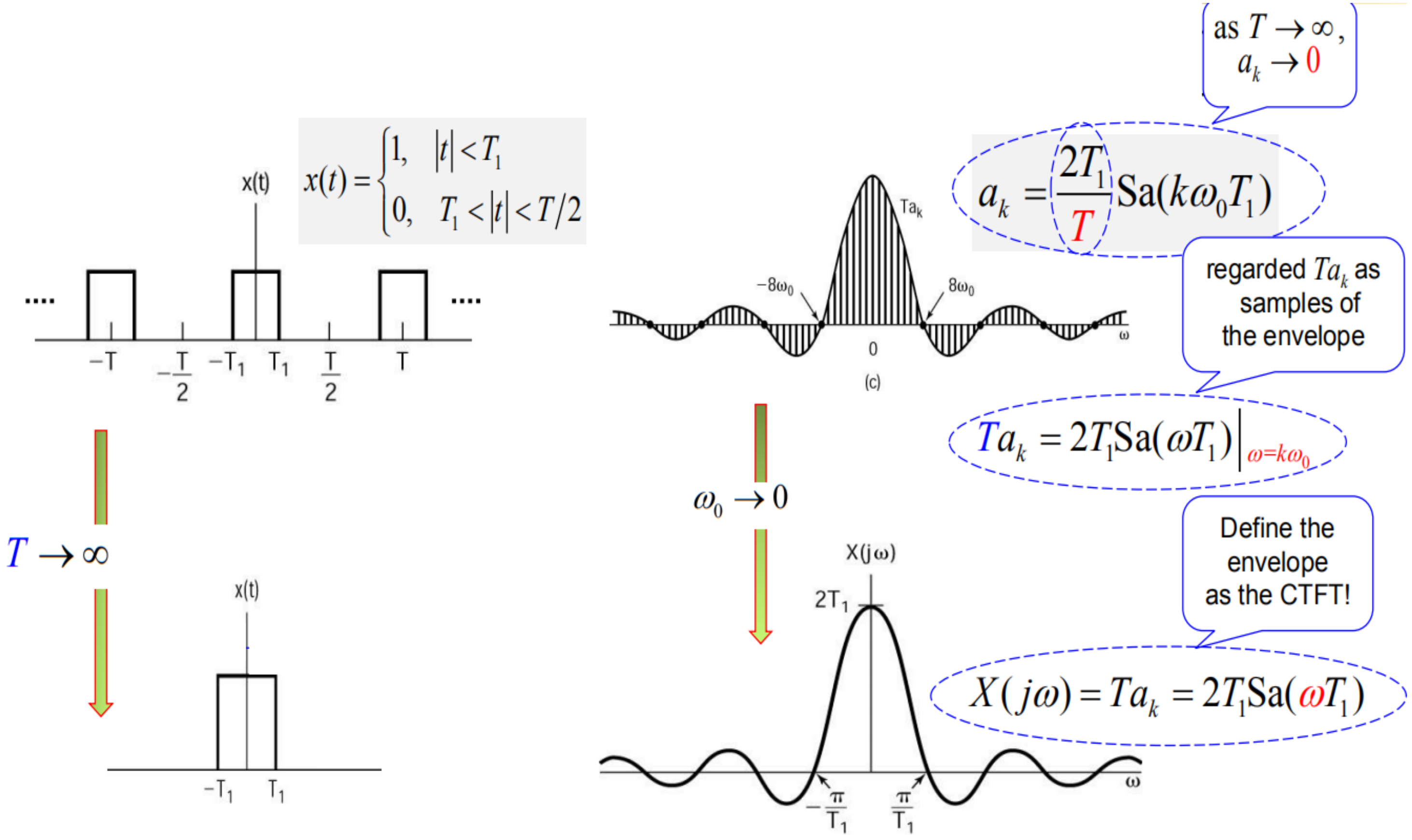
周期性矩形脉冲，当周期 T_0增大时，频谱的幅度随 T_0 的增大而下降；谱线间隔随 T_0 的增大而减小；但频谱的包络不变。

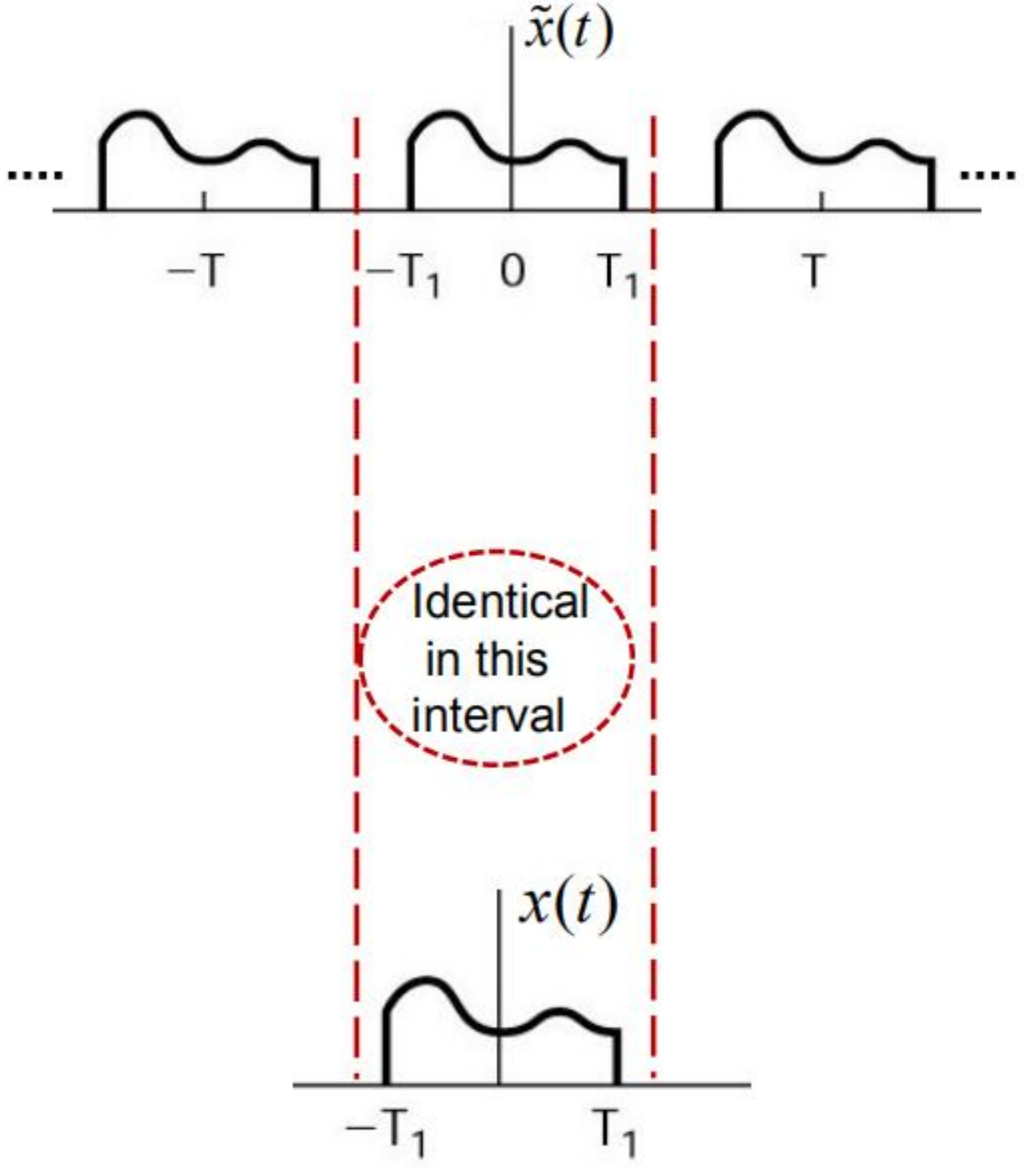
周期信号 → 非周期信号

离散谱 → 连续谱

频谱的包络 $T_0 a_k = \left.\dfrac{2\sin\omega T_1}{\omega}\right|_{\omega=k\omega_0}$

当 $T_0 \to \infty$ 时,周期性矩形脉冲信号将演变成为非周期的单个矩形脉冲信号，离散的频谱将演变为连续的频谱。





$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \tilde{x}(t)$$

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & |t| < \dfrac{T}{2} \\ 0 & others \end{cases}$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT)$$

将$\tilde{x}(t)$展开成傅里叶级数形式，如下：

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0=2\pi/T$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \quad =\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$X(j\omega)=\lim_{T\to\infty}a_k T=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$ ——连续时间傅里叶变换

与周期信号傅里叶级数对比有：$a_k=\frac{1}{T}X(jk\omega_0)$

这表明:周期信号的频谱就是与它相对应的非周期信号频谱的样本。

根据傅里叶级数表示：

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0$$

当 $T\to\infty$ **时，** $\tilde{x}(t)\to x(t),\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}\to d\omega,$

$k\omega_0\to\omega\qquad \sum\to\int$ **于是有：**

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$ —— **傅里叶反变换**

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

周期信号的频谱是对应的非周期信号频谱的样本；而非周期信号的频谱是对应的周期信号频谱的包络。

傅里叶变换的收敛

傅里叶变换的收敛问题就应该和傅里叶级数的收敛相一致。也有相应的两组**充分**条件：

1. 若 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ 则 $X(j\omega)$ 存在。

这表明能量有限的信号其傅里叶变换一定存在。

2. Dirichlet 条件

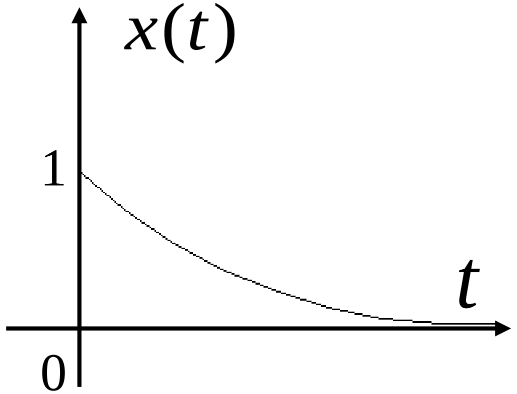
a. 绝对可积条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

b. 在任何有限区间内，$x(t)$ 只有有限个极值点，且极值有限。

c. 在任何有限区间内，$x(t)$ 只有有限个第一类间断点。

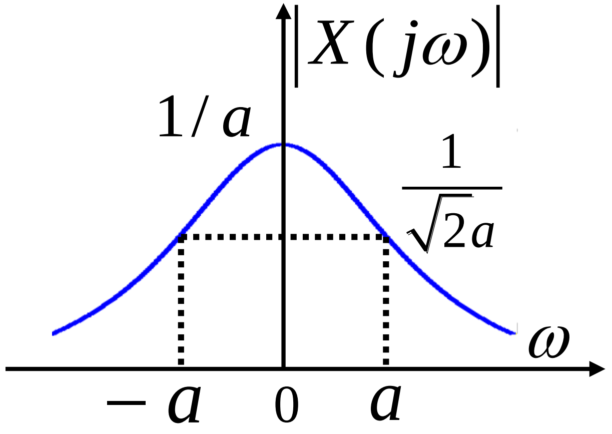
□ 常见信号的傅里叶变换

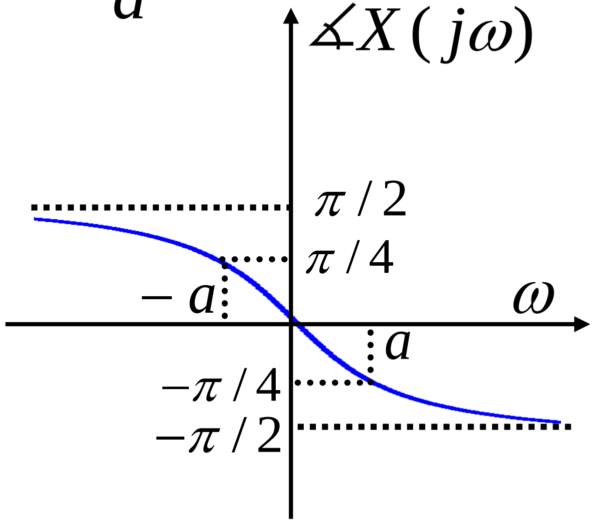
1. $x(t)=e^{-at}u(t),\quad a>0$



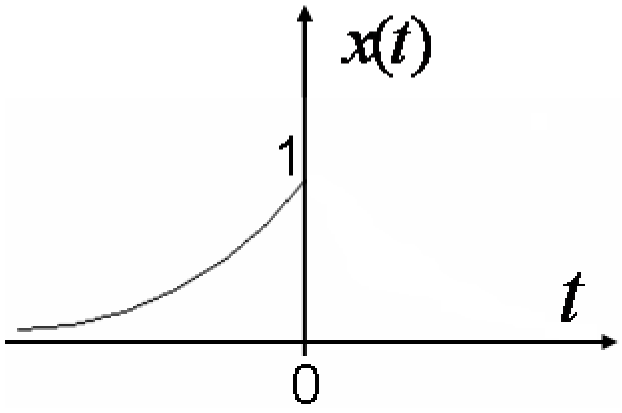
$$X(j\omega)=\int_0^{\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{a+j\omega}$$

$$\left|X(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\qquad\qquad \angle X(j\omega)=-\tan^{-1}\frac{\omega}{a}$$





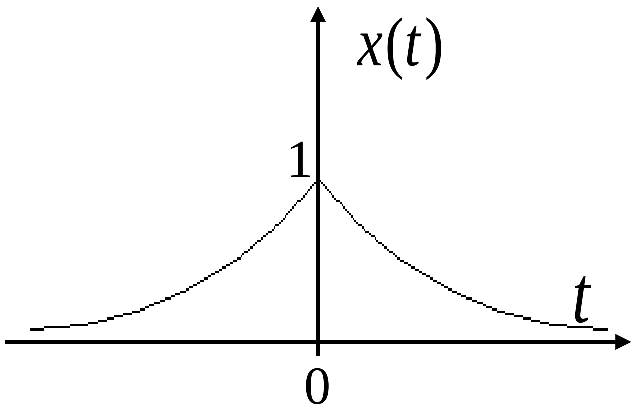
2. $x(t)=e^{at}u(-t), \quad a>0$



$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{a-j\omega}$$

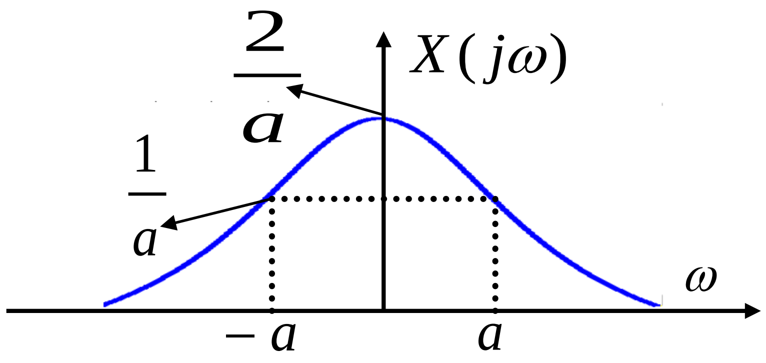
$$x_2(t)=x_1(-t) \rightarrow X_2(j\omega)=X_1(-j\omega)$$

3. $x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$

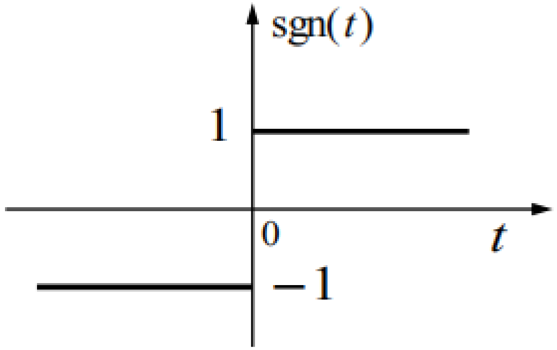


$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

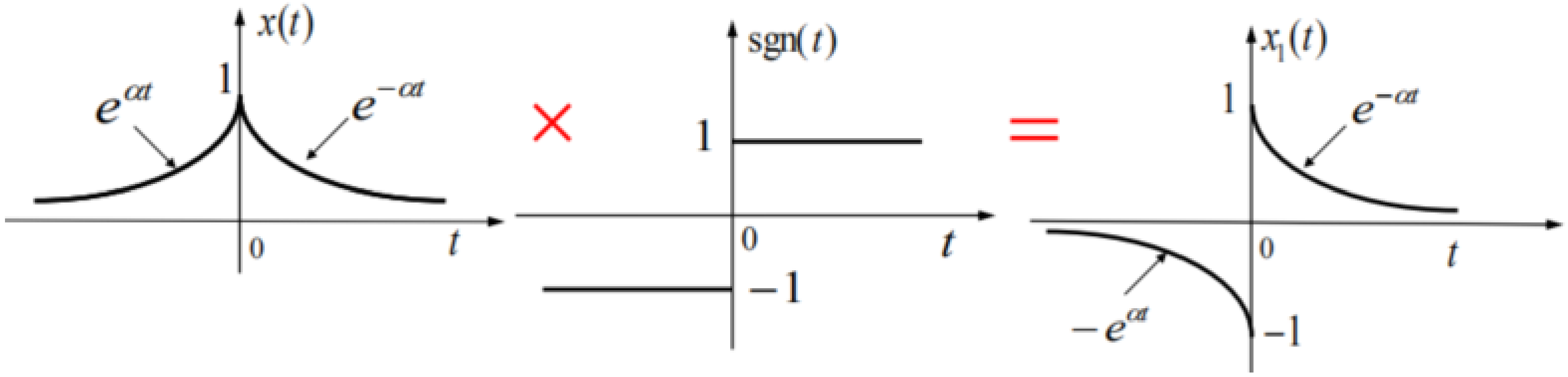
$$= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$



4、



$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$



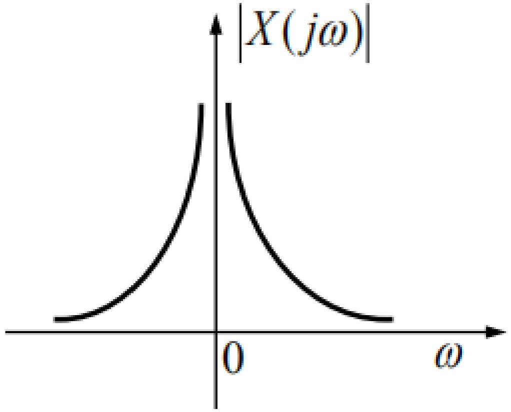
$$x(t)=e^{\alpha t}u(-t)+e^{-\alpha t}u(t)$$

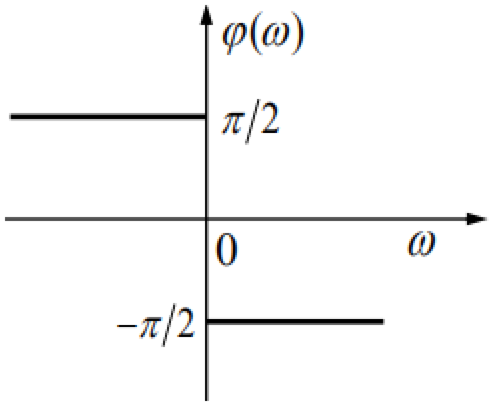
$$x_1(t)=x(t)\cdot\mathrm{sgn}(t)=-e^{\alpha t}u(-t)+e^{-\alpha t}u(t)$$

$$X_1(j\omega)=\int_{-\infty}^{0}(-e^{\alpha t})e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{-2j\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

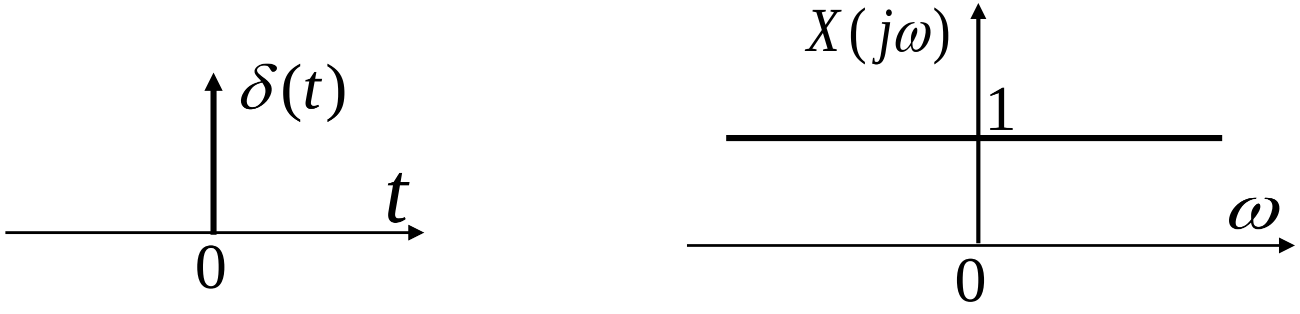
$$\mathbb{F}[\mathrm{Sgn}(t)]=\lim_{a\to 0}\frac{-j2\omega}{a^2+\omega^2}=\frac{2}{j\omega}$$





5. $x(t)=\delta(t)\xleftrightarrow{FT}1$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$$



5. $x(t)=\delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$$

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}1\times e^{j\omega t}d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\pm j\omega t}d\omega=2\int_{0}^{\infty}\cos\omega t d\omega=2\pi\delta(t)$$

6. $x(t)=\delta(t-t_0)\xleftrightarrow{FT}e^{-j\omega t_0}$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-j\omega(t-t_0)}d(t-t_0)$$

$$=e^{-j\omega t_0}$$ 时移性质

7. $x(t) = 1 \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega)$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

8. $x(t)=e^{j\omega_0 t}\xleftrightarrow{FT}2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

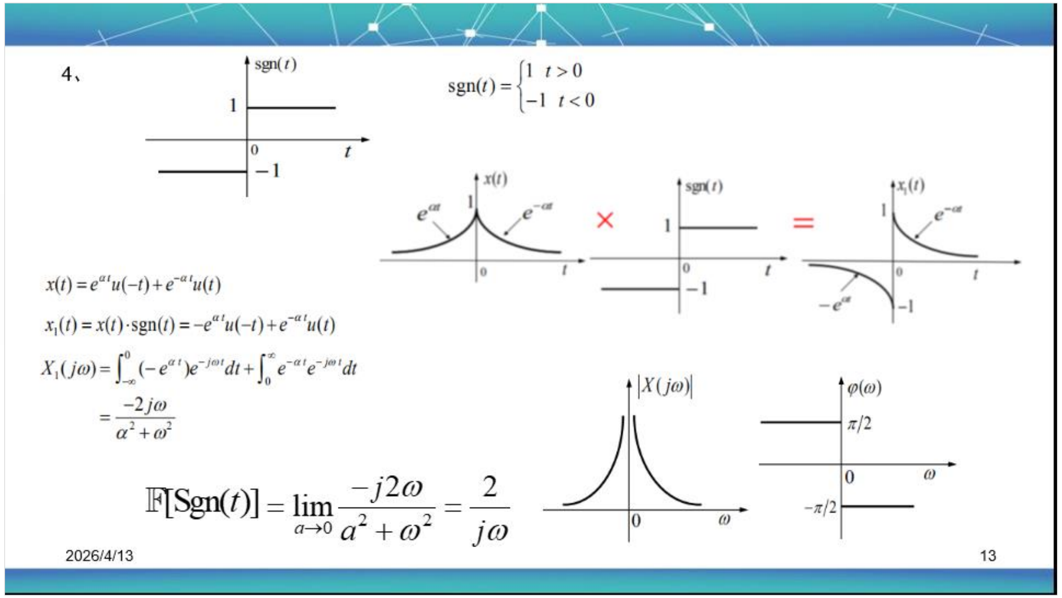
频移性质

9. $$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

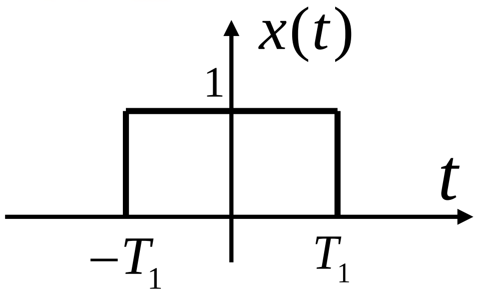
$$\operatorname{Sgn}(t) = \lim_{a \to 0}[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)] \xleftrightarrow{FT} \frac{2}{j\omega}$$

$$x(t) = 1 \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega)$$



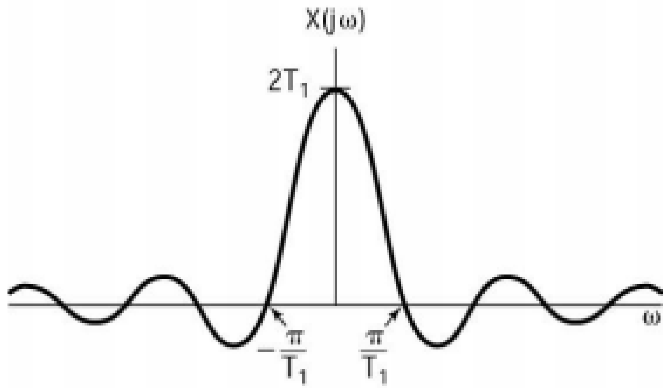
10. 矩形脉冲:

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & |t|>T_1\end{cases}$$



$$X(j\omega)=\int_{-T_1}^{T_1}e^{-j\omega t}dt=\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}=\frac{2T_1\sin\omega T_1}{\omega T_1}$$

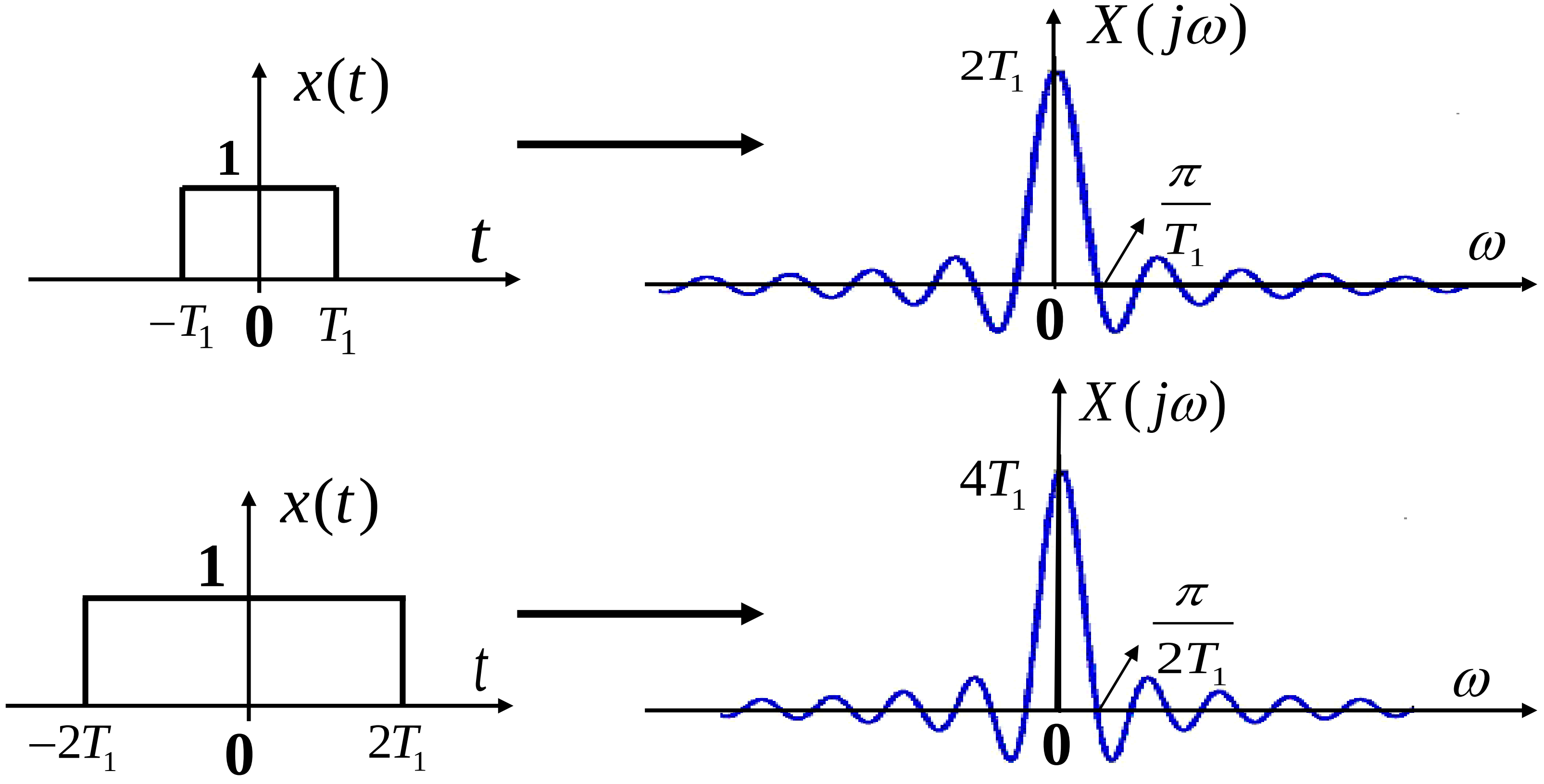
$$=2T_1\,\mathrm{Sa}(\omega T_1)=2T_1\,\mathrm{Sinc}(\frac{\omega T_1}{\pi})$$



和周期信号的频谱对比

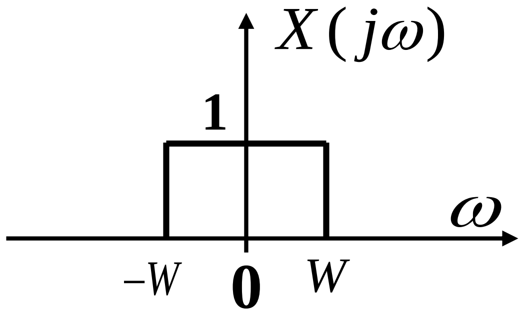
$$\boxed{a_k=\frac{2\sin k\omega_0T_1}{k\omega_0T_0}}$$

不同脉冲宽度对频谱的影响



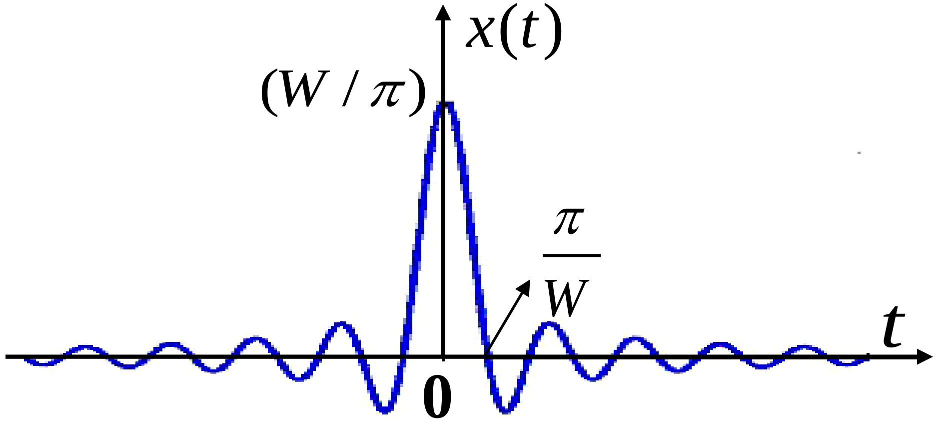
信号在时域和频域之间有一种相反的关系

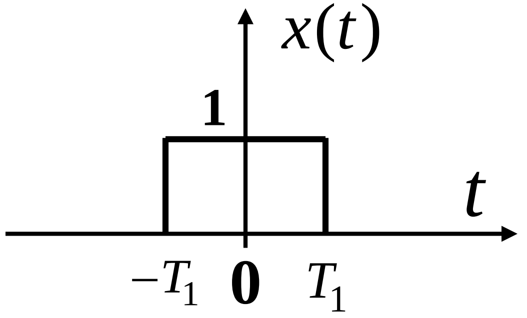
11. $X(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & |\omega|>W\end{cases}$

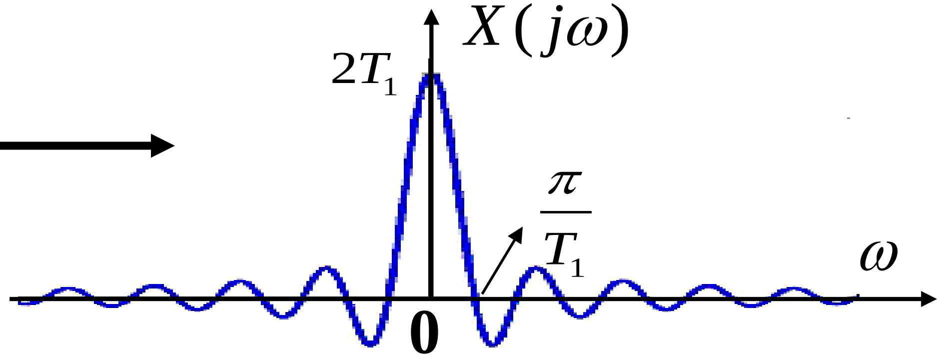


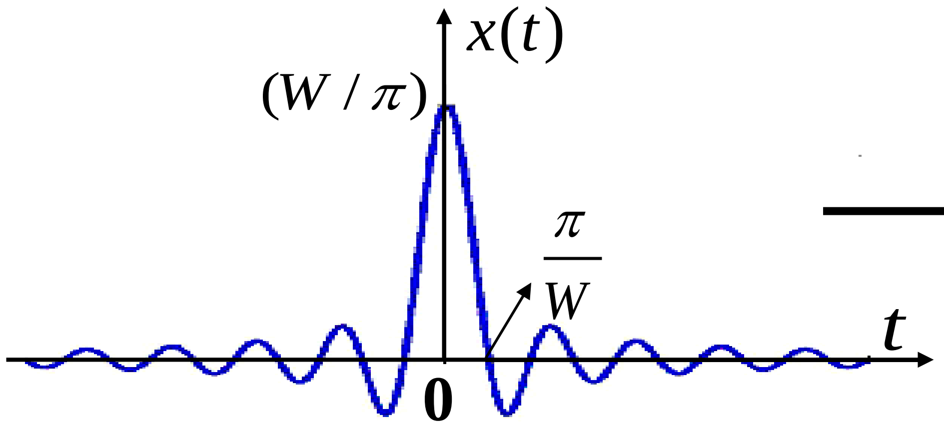
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}e^{j\omega t}d\omega=\frac{\sin Wt}{\pi t}$$

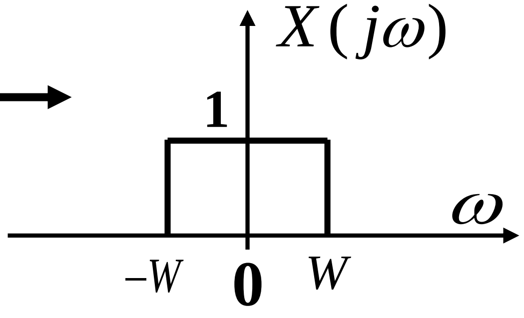
$$=\frac{W}{\pi}\mathrm{Sa}(Wt)=\frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$



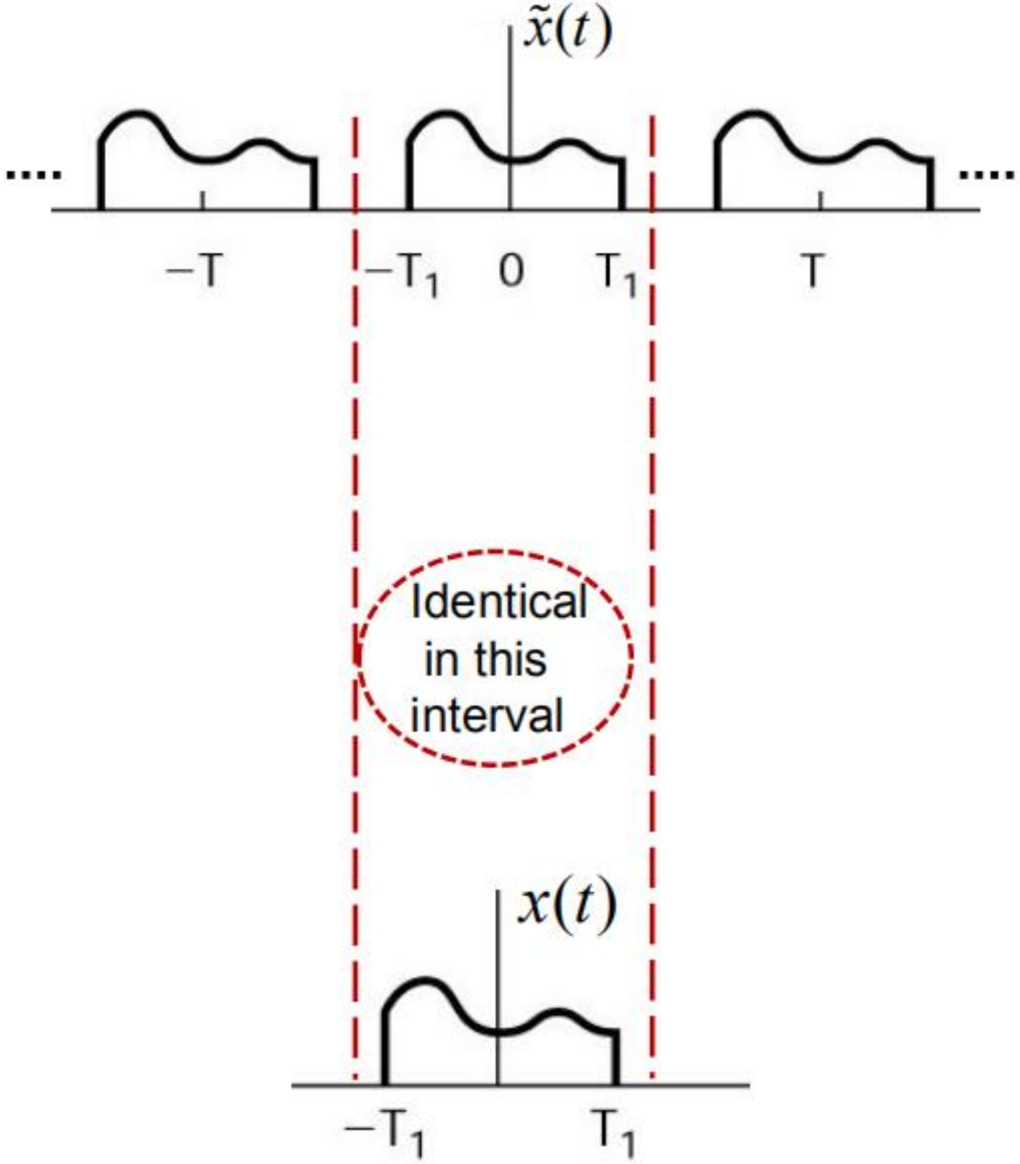

$x(t)$
1
t
$-T_1$
0
T_1


$X(j\omega)$
$2T_1$
$\frac{\pi}{T_1}$
ω
0


$x(t)$
(W/π)
$\frac{\pi}{W}$
t
0


$X(j\omega)$
1
ω
$-W$
0
W

$$
\begin{tikzcd}
\text{周期信号} \arrow[r] \arrow[d, "T_1 \to \infty"] \arrow[dr, "?"] & \text{傅里叶级数} \arrow[d, "T_1 \to \infty"] \\
\text{非周期信号} \arrow[r] & \text{傅里叶变换}
\end{tikzcd}
$$



$\tilde{x}(t)$
....
....
$-T$
$-T_1$
0
T_1
T
Identical in this interval
$x(t)$
$-T_1$
T_1

4.2 周期信号的傅里叶变换

$$x(t)=e^{j\omega_0 t}\xleftrightarrow{FT}2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

于是当把周期信号表示为傅里叶级数时，因为

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

就有

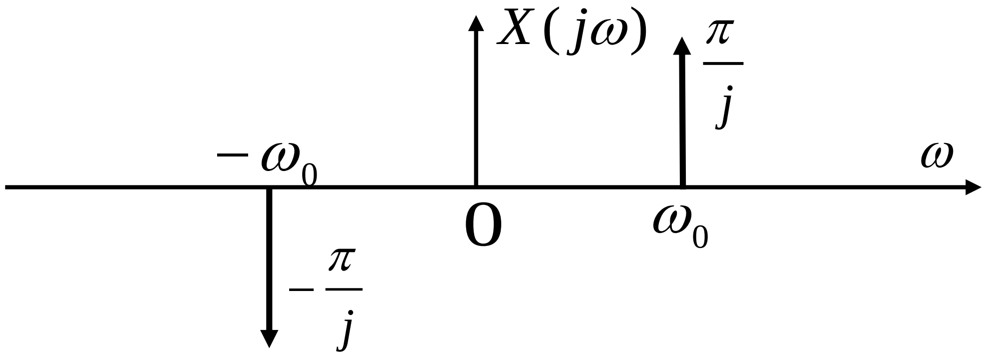
$$X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

——————**周期信号的傅里叶变换表示**

这表明：周期信号的傅里叶变换由一系列冲激组成，每一个冲激分别位于信号的各次谐波的频率处，其冲激强度正比于对应的傅里叶级数的系数。

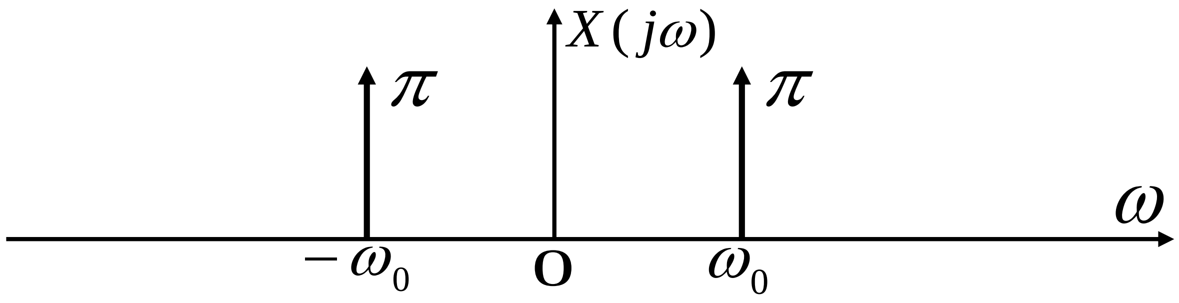
12： $x(t) = \sin\omega_0 t = \dfrac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}]$

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$



13: $x(t)=\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}]$

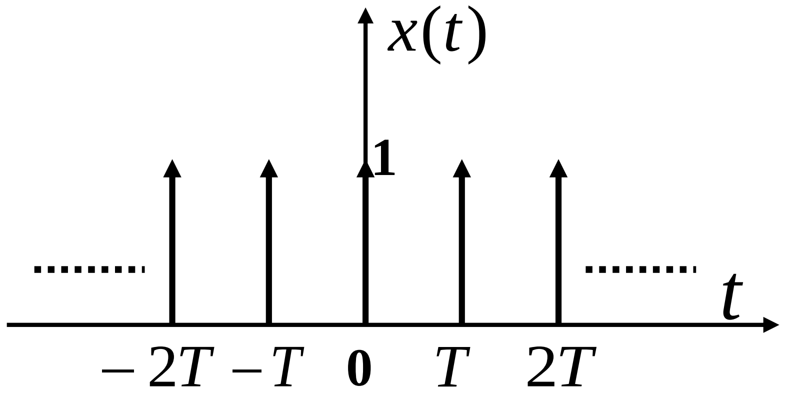
$$X(j\omega)=\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

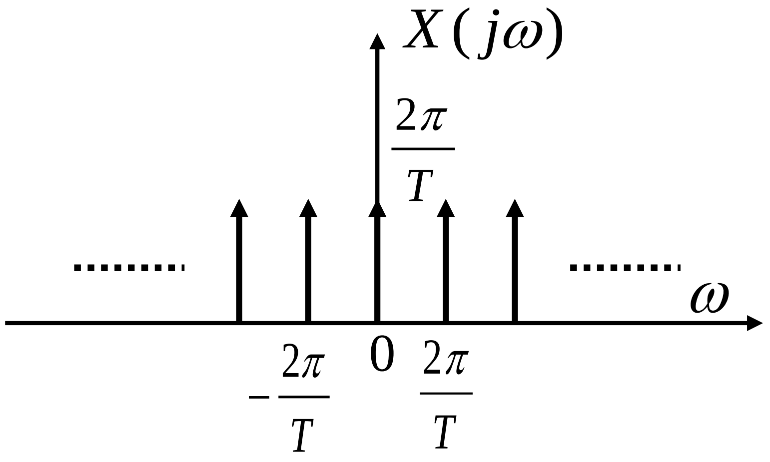


14: $$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

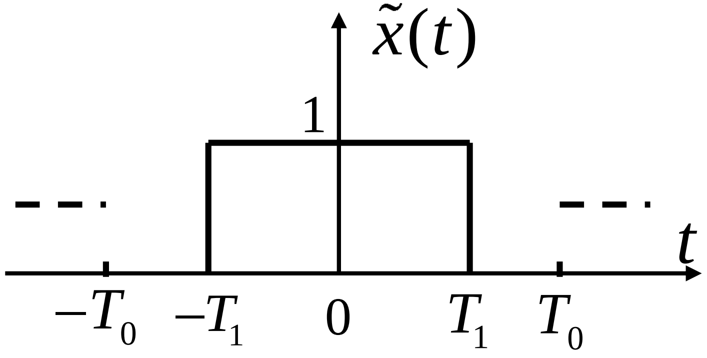
$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)dt=\frac{1}{T}$$

$$\therefore\quad X(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}k)$$

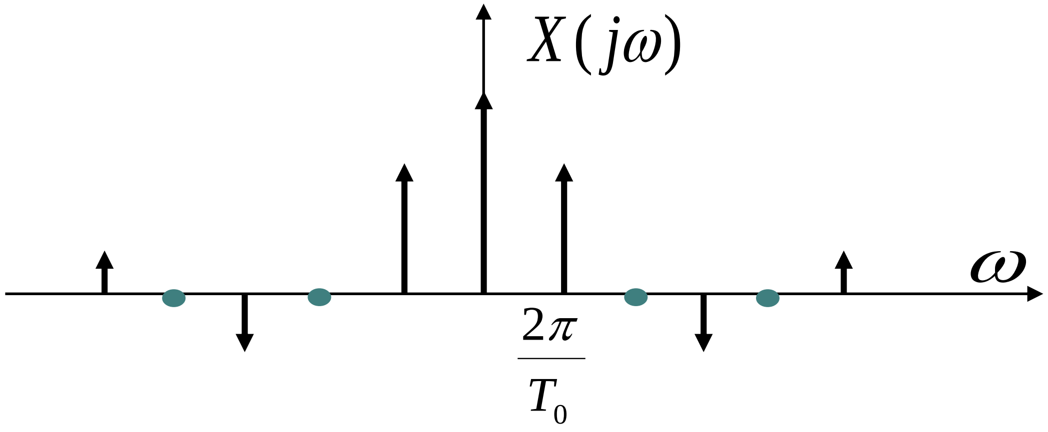




15. 周期性矩形脉冲



$$a_k = \frac{2T_1}{T_0}\mathrm{Sa}\left(\frac{2\pi}{T_0}kT_1\right) = \frac{\sin\frac{2\pi}{T_0}T_1 k}{\pi k}$$



$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}kT_1\right)}{k}\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T_0}k\right)$$

$$\boxed{\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{2}}$$

4.3 连续时间傅里叶变换性质

线性: Linearity

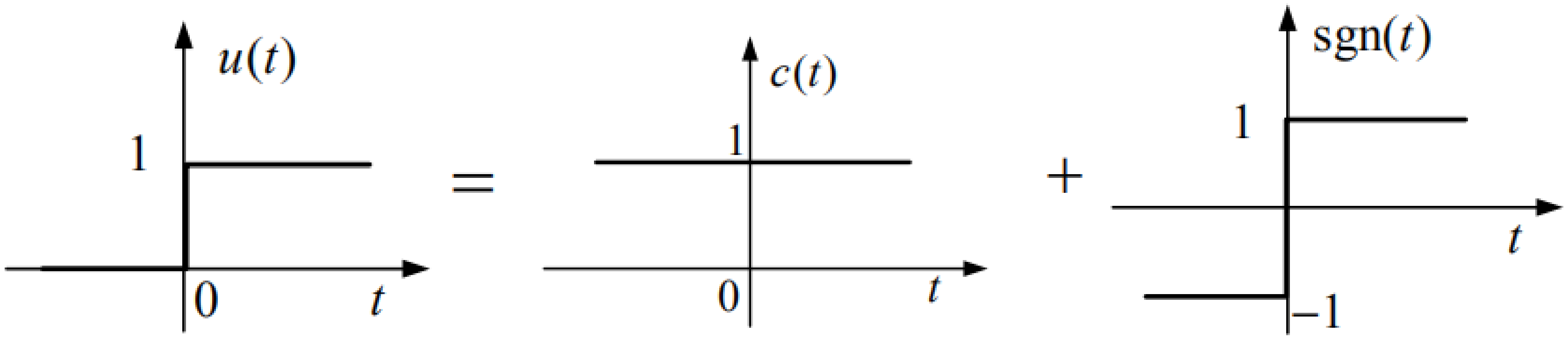
若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega), \quad y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$

则 $ax(t)+by(t) \leftrightarrow aX(j\omega)+bY(j\omega)$

$$Z(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}[ax(t)+by(t)]e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} ax(t)e^{-j\omega t}dt+\int_{-\infty}^{+\infty} by(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=aX(j\omega)+bY(j\omega)$$



$$u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)\xleftrightarrow{\text{CTFT}}\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\qquad 1\xleftrightarrow{\text{CTFT}}2\pi\delta(\omega)\qquad \mathrm{sgn}(t)\xleftrightarrow{\text{CTFT}}\frac{2}{j\omega}$$

$$u(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

□ 时移：Time Shifting

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 则 $x(t-t_0) \leftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

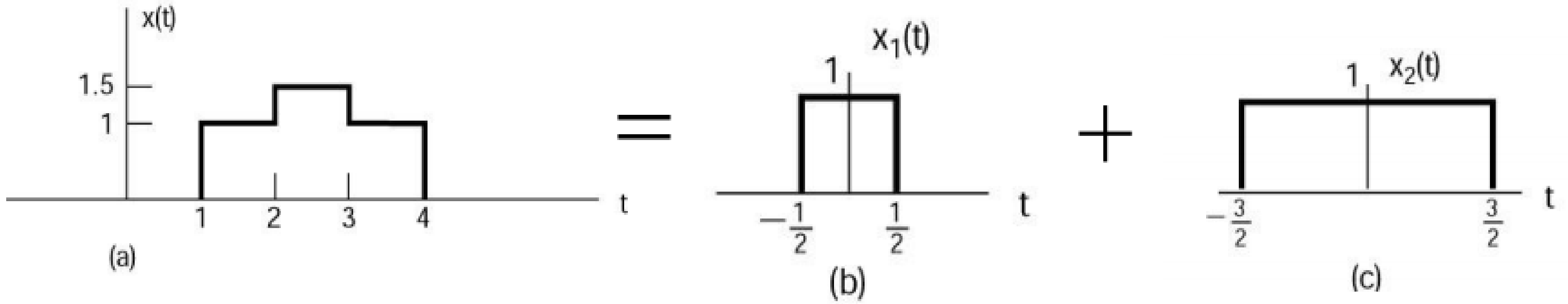
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

在该式中以 $t-t_0$ 取代t，可得

$$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-j\omega t_0}X(j\omega)]e^{j\omega t}d\omega$$

这表明信号的时移只影响它的相频特性，其相频特性会增加一个线性相移。

□ 例题



$$x(t)=\frac{1}{2}x_1(t-2.5)+x_2(t-2.5)$$

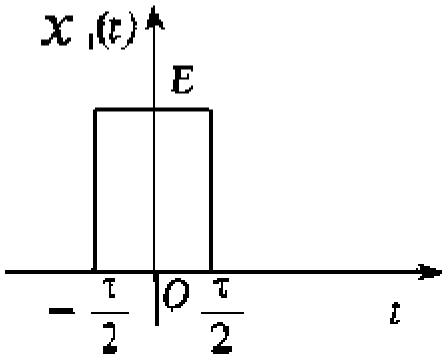
$$X_1(j\omega)=\int_{-1/2}^{1/2}x_1(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-1/2}^{1/2}=\frac{1}{-j\omega}(e^{-j\omega/2}-e^{j\omega/2})=\frac{2}{\omega}\sin(\omega/2)$$

$$X_2=\frac{2}{\omega}\sin(3\omega/2)$$

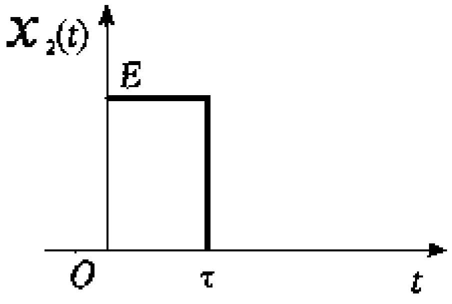
$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{2}X_1(e^{j\omega})e^{-j2.5\omega}+X_2(e^{j\omega})e^{-j2.5\omega}$$

□ 例题

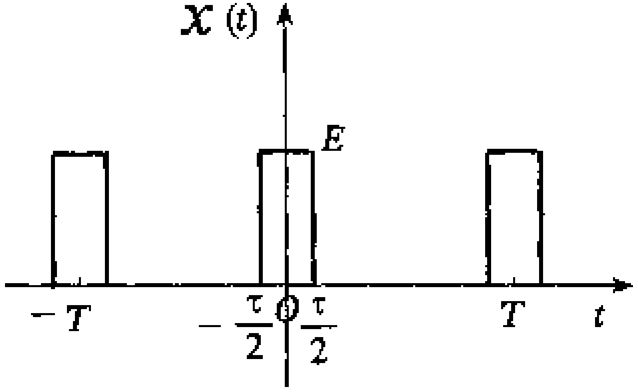
$$X_1(j\omega) = E\tau Sa(\frac{1}{2}\tau\omega)$$

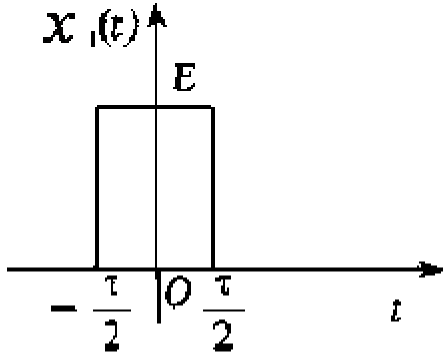


$$X_2(j\omega) = E\tau Sa(\frac{1}{2}\tau\omega)e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$



◻ 例题





$$X_1(j\omega) = E\tau Sa(\frac{1}{2}\tau\omega)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_1(t-T) + x_1(t+T)$$

$$X(j\omega) = E\tau Sa(\frac{1}{2}\tau\omega)[1 + e^{-j\omega T} + e^{j\omega T}]$$

$$X(j\omega) = E\tau Sa(\frac{1}{2}\tau\omega)[1 + 2\cos(\omega T)]$$

频移

$$\boxed{e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j(\omega-\omega_0))}$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt$$

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j(\omega-\omega_0))$$

$$x(t)=e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

例子

将时间信号乘以 $e^{j\omega_0 t}$ 等效于将频谱沿频率轴右移 ω_0，这种频谱搬移技术在通信系统中广泛使用。

实际中采用正弦和余弦信号。

$$x(t)\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2}[X(j(\omega+\omega_0))+X(j(\omega-\omega_0))]$$

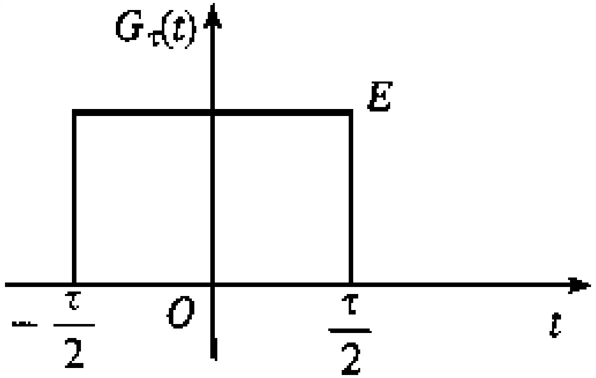
例子

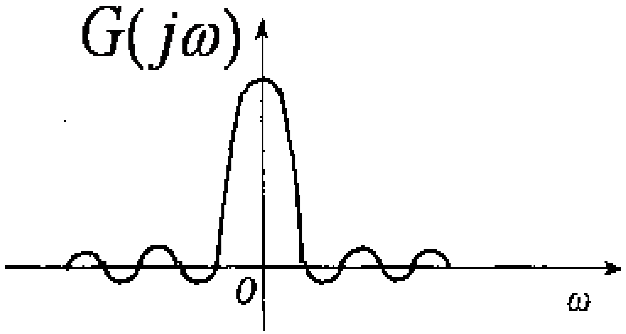
$$x(t) = G(t)\cos\omega_0 t$$

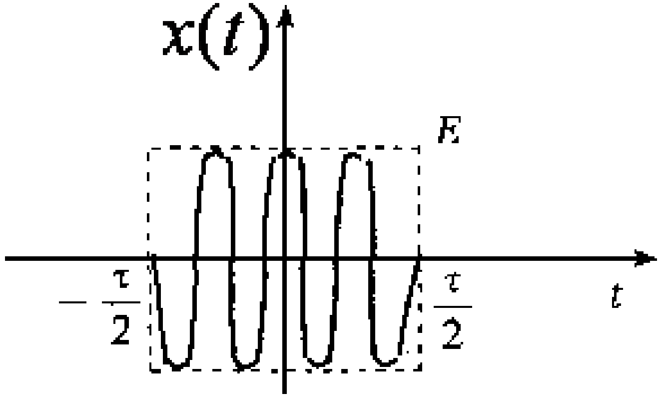
$$G(j\omega) = E\tau Sa(\frac{1}{2}\tau\omega)$$

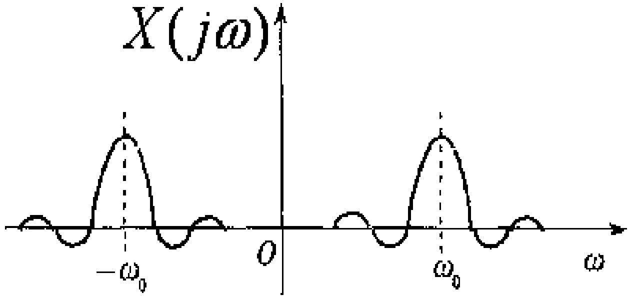
$$x(t) = \frac{1}{2}G(t)(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}[G(j(\omega-\omega_0)) + G(j(\omega+\omega_0))]$$









$$X(j\omega) = \frac{1}{2}E\tau Sa[\frac{1}{2}\tau(\omega-\omega_0)] + \frac{1}{2}E\tau Sa[\frac{1}{2}\tau(\omega+\omega_0)]$$

□ 共轭性：Conjugate

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 则 $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$

由 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ 可得

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}dt$$

所以 $$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}dt$$

即 $$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$$

- 若 $x(t)$是实信号，则 $x(t) = x^*(t)$

  于是有: $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$

- 若 $X(j\omega) = \mathrm{Re}[X(j\omega)] + j\,\mathrm{Im}[X(j\omega)]$ 则可得

$\mathrm{Re}[X(j\omega)] = \mathrm{Re}[X(-j\omega)]$ 即实部是偶函数

$\mathrm{Im}[X(j\omega)] = -\mathrm{Im}[X(-j\omega)]$ 虚部是奇函数

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{j\angle X(j\omega)}$$

$$\Longrightarrow \quad |X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$$

$$\angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$$

即：模是偶函数，相位是奇函数

• **如果 $x(t)=x(-t)$ 傅里叶变换是偶函数。**

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(-t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{j\omega\tau}dt=X(-j\omega)$$

又因为 $X(-j\omega)=X^{*}(j\omega)$ **所以** $X(j\omega)=X^{*}(j\omega)$

表明： **实偶信号的傅里叶变换是实偶函数。**

- 如果 $x(t)=-x(-t)$ 傅立叶变换是奇函数。

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}-x(-t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}-x(\tau)e^{j\omega\tau}dt=-X(-j\omega)$$

又因为 $X(-j\omega)=X^{*}(j\omega)$ **所以** $X(j\omega)=-X^{*}(j\omega)$

表明： **实奇信号的傅里叶变换是虚奇函数。**

- **若** $x(t)=x_e(t)+x_o(t)$ **则有:**

$$x_e(t)=E_v\{x(t)\}=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$$

$x_e(t)$实、偶函数，所以对应的频谱是实、偶函数

$$x_e(t)\leftrightarrow X_e(j\omega) \qquad X_e(j\omega)=\mathrm{Re}[X(j\omega)]$$

$$x_o(t)=O_d\{x(t)\}=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$$

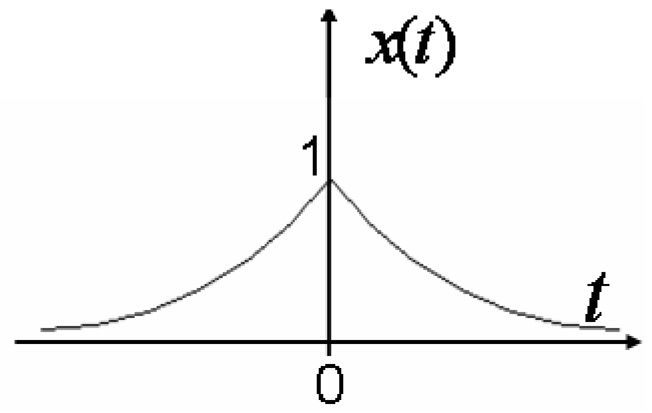
$x_e(t)$实、奇函数，所以对应的频谱是虚、奇函数

$$X_o(j\omega)=j\,\mathrm{Im}[X(j\omega)]$$

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

$$x_1(t) = e^{-at}u(t) \qquad X_1(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

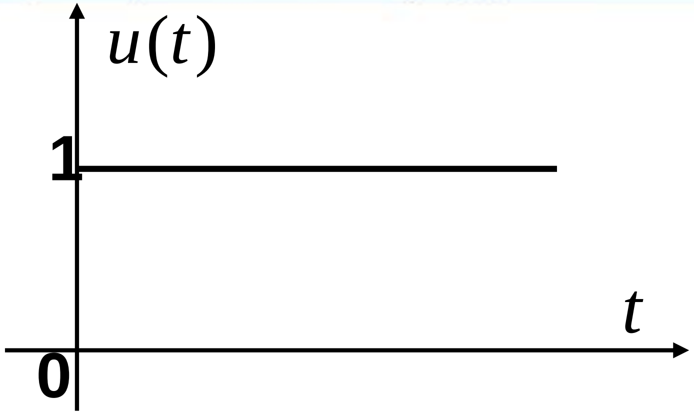
$$x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$



$$x(t) = 2E_v[x_1(t)] \leftrightarrow 2\mathrm{R}_e\left[X_1(j\omega)\right]$$

$$X(j\omega) = 2\mathrm{R}_e\left[X_1(j\omega)\right] = 2\mathrm{R}_e\left[\frac{1}{a + j\omega}\right] = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

例: $u(t)$ 的频谱:

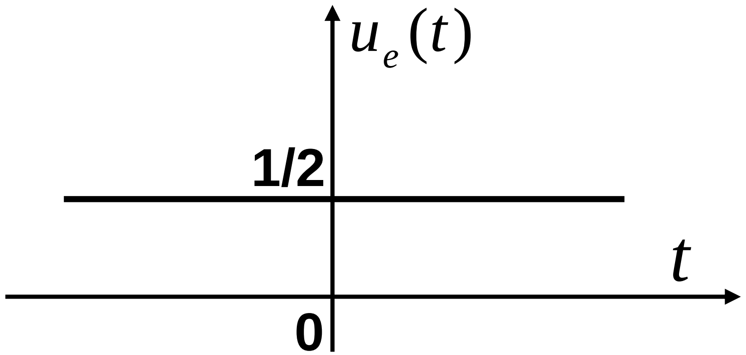


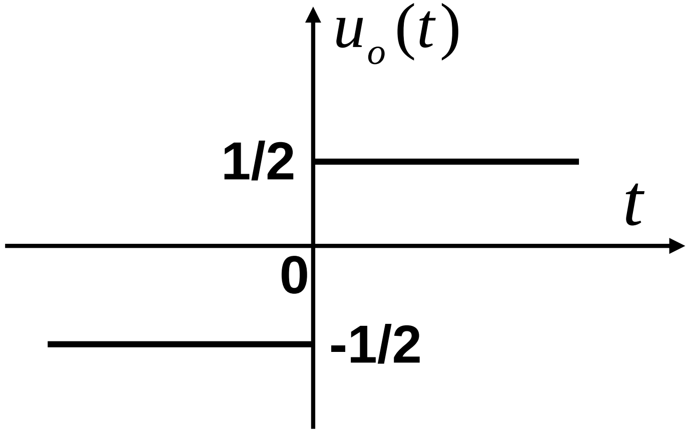
将 $u(t)$ 分解为偶部和奇部有

$$u(t) = u_e(t) + u_o(t)$$

$$u_e(t) = \frac{1}{2}$$

$$u_o(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Sgn}(t)$$





$$\boxed{u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)}$$

尺度变换

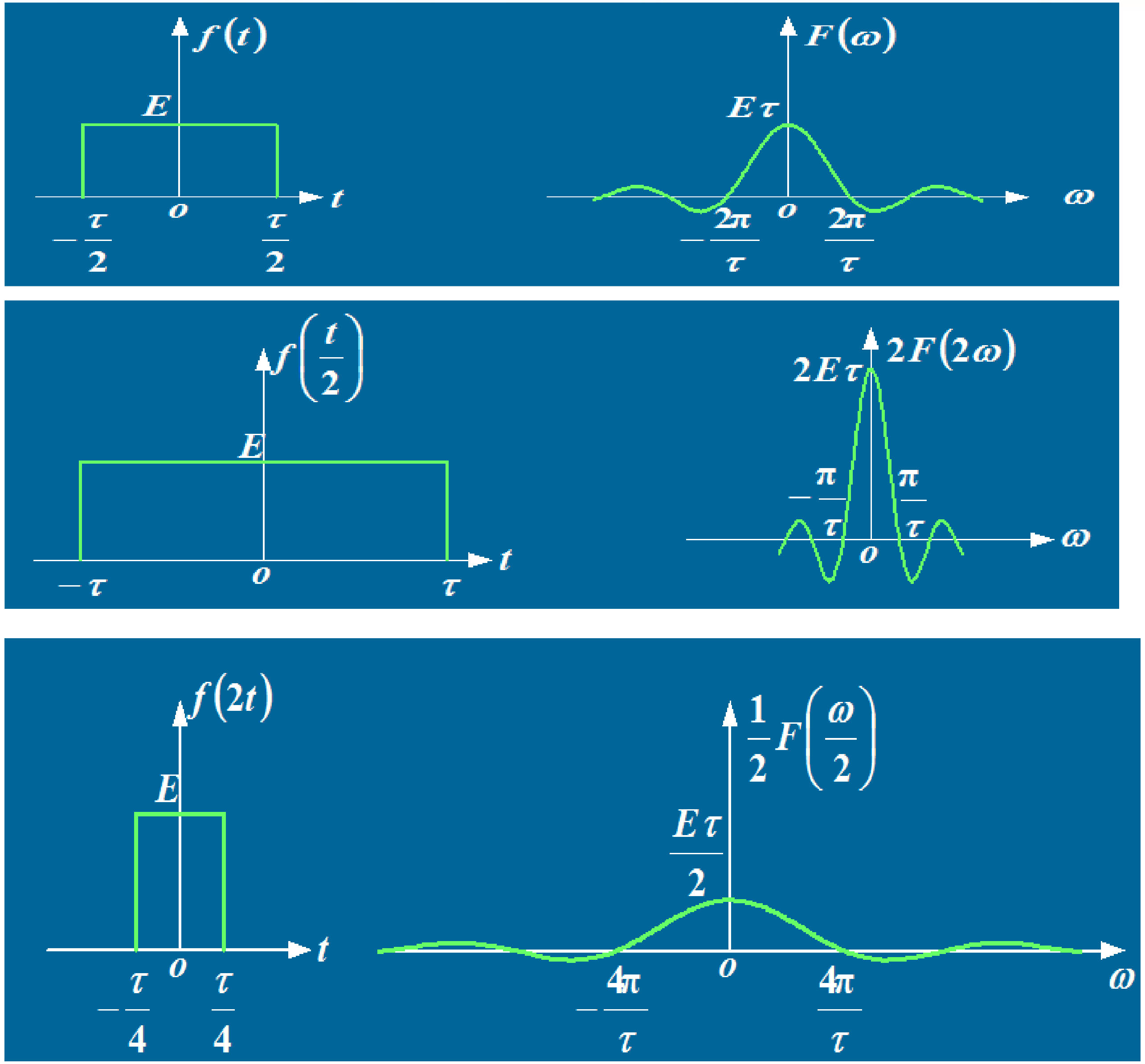
$$\boxed{y(t)=x(at)\xleftrightarrow{FT}Y(j\omega)=\frac{1}{|a|}X(\frac{j\omega}{a})}$$

$$Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(at)e^{-j\omega t}dt \qquad 令\ t_1=at$$

$$a>0 \qquad Y(j\omega)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}x(t_1)e^{-j\omega\frac{t_1}{a}}dt_1=\frac{1}{a}X(\frac{j\omega}{a})$$

$$a<0 \qquad Y(j\omega)=\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty}x(t_1)e^{-j\omega\frac{t_1}{a}}dt_1=\frac{-1}{a}X(j\frac{\omega}{a})$$

尺度变换特性表明：信号如果在时域扩展 a 倍，则其带宽相应压缩 a 倍，反之亦然。这就从理论上证明了时域与频域的相反关系，也证明了信号的脉宽带宽积等于常数的结论。



f(t)
E
t
o
-τ/2
τ/2
F(ω)
Eτ
ω
-2π/τ
2π/τ
f(t/2)
E
-τ
o
τ
t
2F(2ω)
2Eτ
-π/τ
π/τ
o
ω
f(2t)
E
t
o
-τ/4
τ/4
1/2 F(ω/2)
Eτ/2
-4π/τ
o
4π/τ
ω

$$\boxed{y(t) = x(at) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a})}$$

$$\boxed{y(t) = x(-t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(-j\omega)}$$

$$e^{-at}u(t) \qquad a > 0 \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{a + j\omega}$$

$$e^{at}u(-t) \qquad a > 0 \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{a - j\omega}$$

□ 时域微分与积分: Differentiation and Integration

$$\text{若}\ x(t) \leftrightarrow X(j\omega)\quad \text{则}\ \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$$

(可将微分运算转变为代数运算)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j\omega)^n X(j\omega)$$

时域积分特性：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau]e^{-j\omega t}dt \quad =\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau]e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)[\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)e^{-j\omega t}dt]d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}]e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\pi\delta(\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\pi\delta(\omega)X(j\omega)+\frac{1}{j\omega}X(j\omega)$$

$$=\pi\delta(\omega)X(0)+\frac{1}{j\omega}X(j\omega)$$

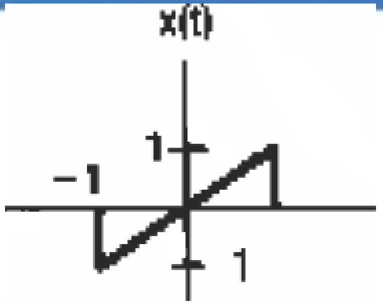
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$ **(时域积分特性)**

由时域积分特性从 $\delta(t) \leftrightarrow 1$

也可得到: $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

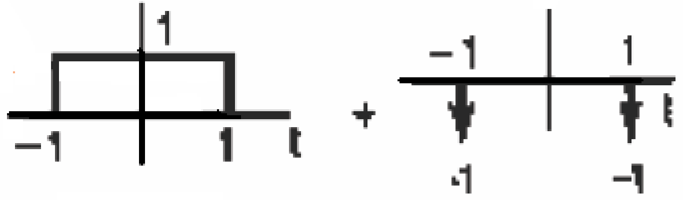
$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)] = 1$$

$$x(t)=t[u(t+1)-u(t-1)]$$



$$\because g(t)=\frac{dx(t)}{dt}=[u(t+1)-u(t-1)]+t[\delta(t+1)-\delta(t-1)]$$

$$=[u(t+1)-u(t-1)]-\delta(t+1)-\delta(t-1)$$



$$G(j\omega)=\int_{-1}^{1}x(t)e^{-j\omega t}dt=(\frac{2\sin\omega}{\omega})-e^{j\omega}-e^{-j\omega}$$

$$=\frac{2\sin\omega}{\omega}-2\cos\omega$$

$$G(0)=2\frac{\sin 0}{0}-2\cos 0=0$$

$$X(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{j\omega}+\pi G(0)\delta(\omega)$$

$$X(j\omega)=\frac{2\sin\omega}{j\omega^{2}}-\frac{2\cos\omega}{j\omega}=-j(\frac{2\sin\omega}{\omega^{2}}-\frac{2\cos\omega}{\omega})$$

连续信号被求导后,其高、低频分量相对关系发生怎样的变化?

A 高频分量增加，低频分量降低。

B 高频分量降低，低频分量增加。

提交

□ 对偶性：Duality

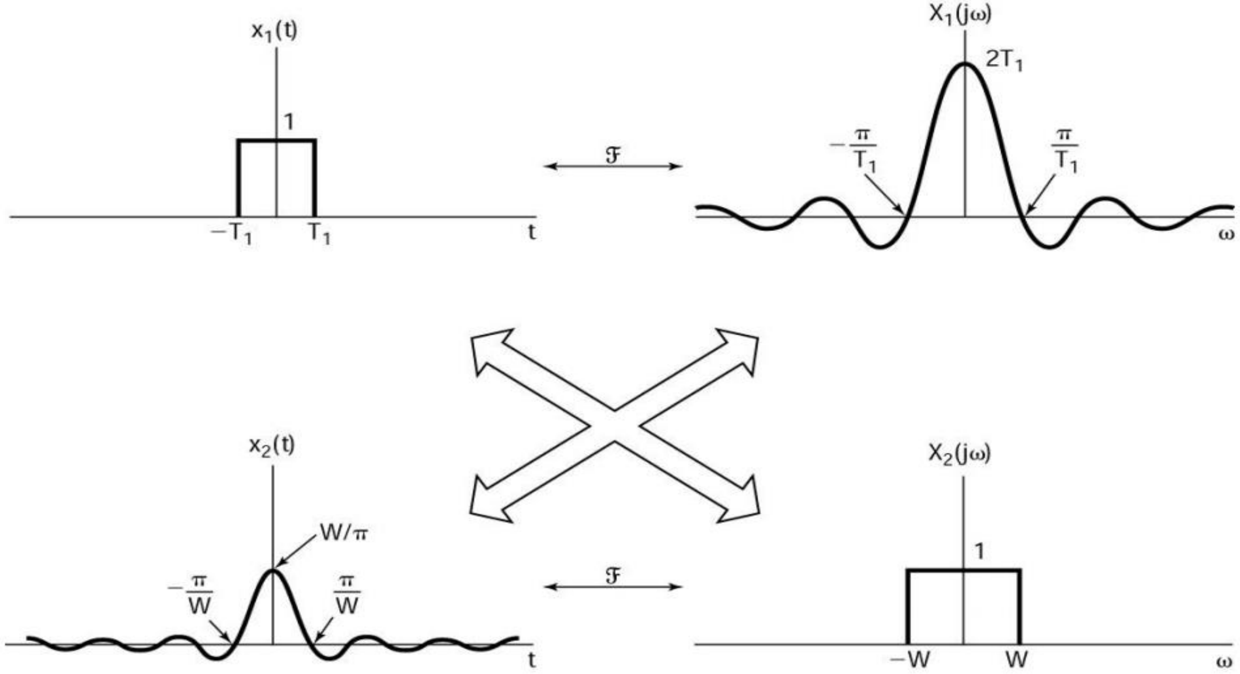
$\boxed{\text{若}\ x(t) \leftrightarrow X(j\omega)\ \text{则}\ X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)}$

证明： $$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$2\pi x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt)e^{j\omega t}dt$$

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt)e^{-j\omega t}dt$$

$$\therefore X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$



$$\text{若} \quad x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \quad \text{则} \quad X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2} \qquad e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \qquad x(t) = e^{-|t|}$$

$$\frac{2}{1+t^2} \xleftrightarrow{F} F\left\{\frac{2}{1+t^2}\right\} = 2\pi e^{-|\omega|}$$

时移特性 $x(t-t_0)\leftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

$\boxed{\text{若 } x(t)\leftrightarrow X(j\omega) \text{ 则 } X(jt)\leftrightarrow 2\pi x(-\omega)}$

$$\boxed{e^{j\omega_0 t}x(t)\xleftrightarrow{FT}X(j(\omega-\omega_0))}$$

由对偶性得 $X(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega)$

由时移性得 $X[j(t-t_0)] \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega) e^{-j\omega t_0}$

再由对偶性得

$$2\pi x(-t) e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\ X[j(-\omega-\omega_0)]$$

$$\boxed{y(t)=x(-t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega)=X(-j\omega)}$$

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j(\omega-\omega_0))}$$

时域微分特性 → 频域微分特性

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \qquad X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

利用时域微分特性有
$$\frac{d}{dt} X(jt) \leftrightarrow 2\pi j\omega x(-\omega)$$

再次对偶得
$$2\pi jtx(-t) \leftrightarrow 2\pi \frac{d}{d(-\omega)} X(-j\omega)$$

由 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$ 有

$$-jtx(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$$

$$-jtx(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(j\omega)}{d\omega} \qquad tx(t) \xleftrightarrow{F} j\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

时域积分特性 $\longrightarrow$ 频域积分特性

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \stackrel{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$$

$$-\frac{1}{jt}x(t)+\pi x(0)\delta(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta)d\eta$$

$$\int_{-\infty}^{t} X(j\tau)d\tau \leftrightarrow [\frac{2\pi x(-\omega)}{j\omega}+2\pi^{2}x(0)\delta(\omega)]$$

再次对偶 $$2\pi[\frac{x(-t)}{jt}+\pi x(0)\delta(t)] \leftrightarrow 2\pi\int_{-\infty}^{-\omega} X(j\tau)d\tau$$

由 $x(-t)\leftrightarrow X(-j\omega)$ **有** $$\frac{x(t)}{-jt}+\pi x(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} X(j\tau)d\tau$$

□ Parseval定理

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

这表明：信号的能量既可以在时域求得，也可以在频域求得。由于 $|X(j\omega)|^2$ 表示了信号能量在频域的分布，因而称其为“能量谱密度”函数。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt]d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)X(j\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

4.4 卷积性质

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \quad h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$

则 $x(t) * h(t) \leftrightarrow X(j\omega)H(j\omega)$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau]e^{-j\omega t}dt$$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t}dt]$$

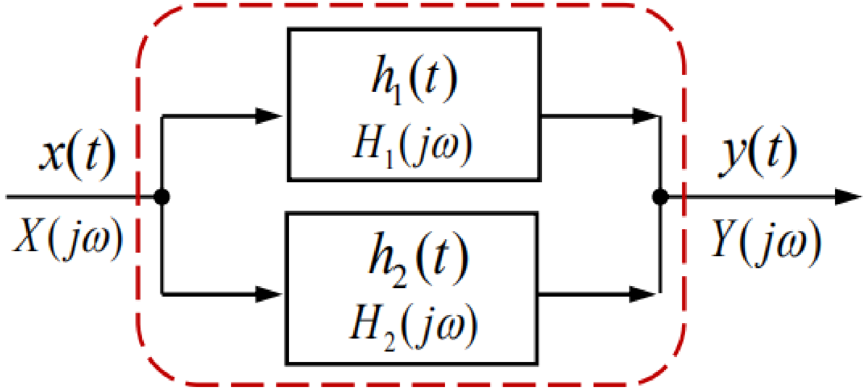
$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)H(j\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

系统的频率响应：

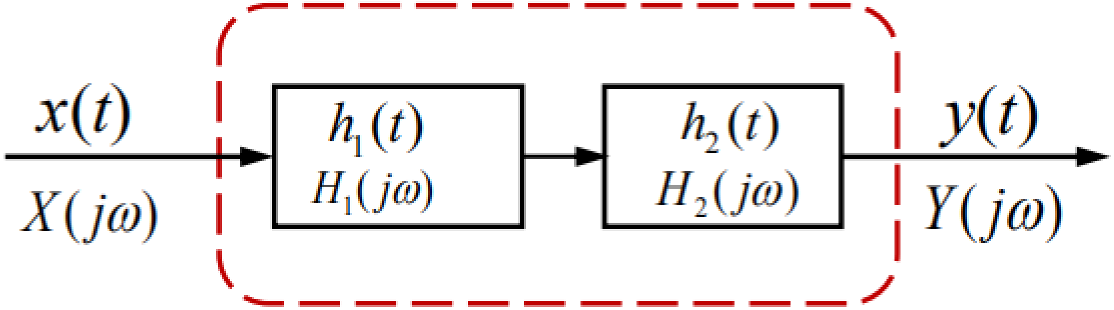
由于$h(t)$ 的傅氏变换$H(j\omega)$就是频率为ω 的复指数信号 $e^{j\omega t}$通过LTI系统时，系统对输入信号在幅度上产生的影响，所以称为系统的频率响应。

$$h(t)=h_1(t)+h_2(t)$$



$$H(j\omega)=H_1(j\omega)+H_2(j\omega)$$

$$h(t)=h_1(t)*h_2(t)$$



$$H(j\omega)=H_1(j\omega)H_2(j\omega)$$

鉴于$h(t)$ 与$H(j\omega)$ 是一一对应的，因而LTI系统可以由其频率响应完全表征。由于并非任何系统的频率响应 $H(j\omega)$ 都存在，因此用频率响应表征系统时，一般都限于对稳定系统。因为，稳定性保证了

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

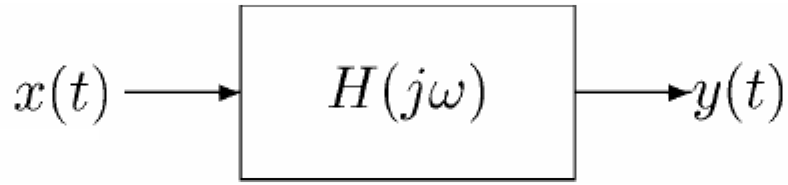
存在傅里叶变换。

LTI系统的频域分析方法

根据卷积特性,可以对LTI系统进行频域分析, 其过程为:

1. 由 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$
2. 根据系统的描述，求出 $H(j\omega)$
3. $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$
4. $y(t) = \mathbb{F}^{-1}[Y(j\omega)]$

$$h(t) = \delta(t - t_0) \qquad H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$



$$Y(j\omega) = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t - t_0)} d\omega = x(t - t_0)$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = j\omega$$

在高频部分被放大

角度变化

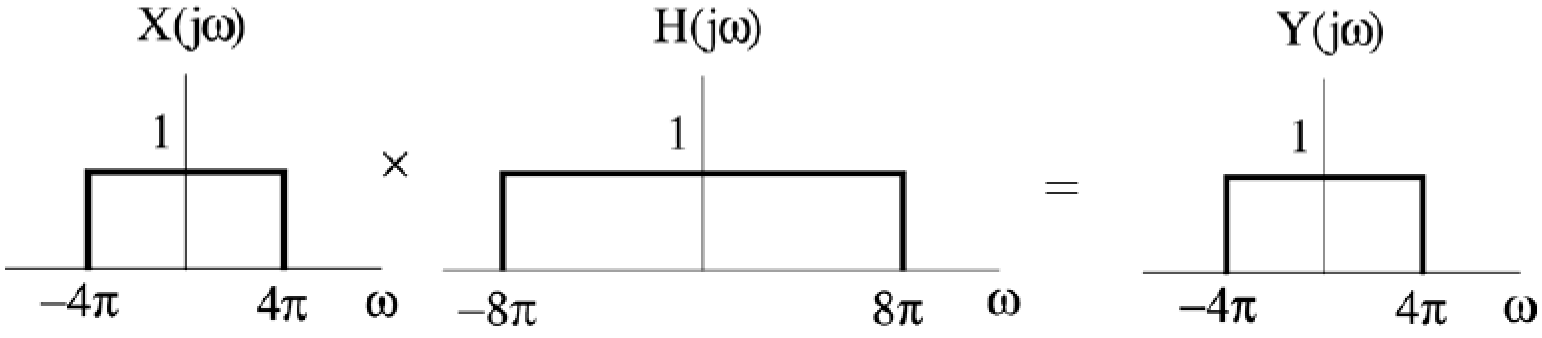
$$\frac{d}{dt}\sin\omega_0 t \quad = \quad \omega_0 \cos\omega_0 t \quad = \quad \omega_0 \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d}{dt}\cos\omega_0 t \quad = \quad -\omega_0 \sin\omega_0 t \quad = \quad \omega_0 \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$

$$\underbrace{\frac{\sin 4\pi t}{\pi t}}_{x(t)} * \underbrace{\frac{\sin 8\pi t}{\pi t}}_{h(t)} \quad = \quad ?$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t)$$



$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad , \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$h(t) = e^{-t}u(t), \quad x(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \quad ?$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega)} \cdot \frac{1}{(2 + j\omega)}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{1}{2 + j\omega}$$

$$\Rightarrow y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$

4.5 相乘性质

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega) \qquad x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$

则 $x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

两个信号在时域相乘，可以看成是由一个信号控制另一个信号的幅度，这就是幅度调制。其中一个信号称为载波，另一个是调制信号。

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega) \qquad x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$

则 $x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

据对偶性有 $X_1(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x_1(-\omega)$

$$X_2(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x_2(-\omega)$$

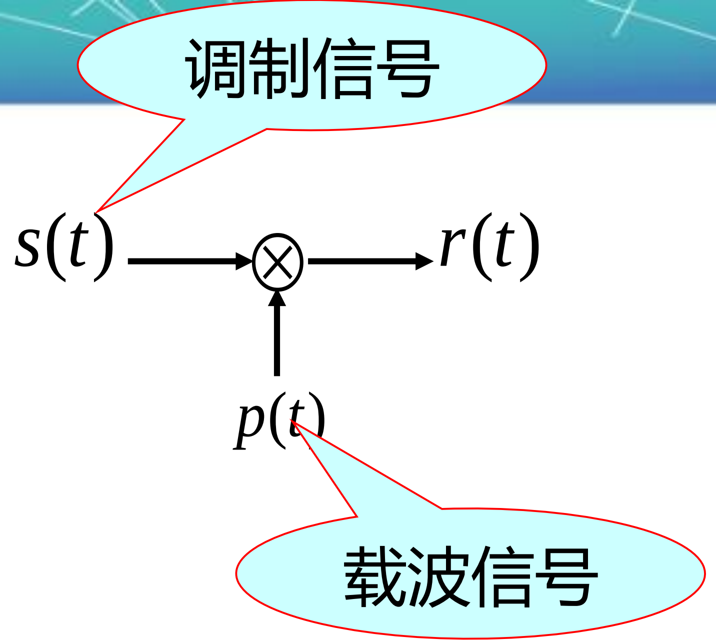
利用卷积性得 $X_1(jt) * X_2(jt) \xleftrightarrow{F} 4\pi^2 x_1(-\omega) x_2(-\omega)$

利用对偶性有 $4\pi^2 x_1(-t)\, x_2(-t) \xleftrightarrow{F} 2\pi X_1(-j\omega) * X_2(-j\omega)$

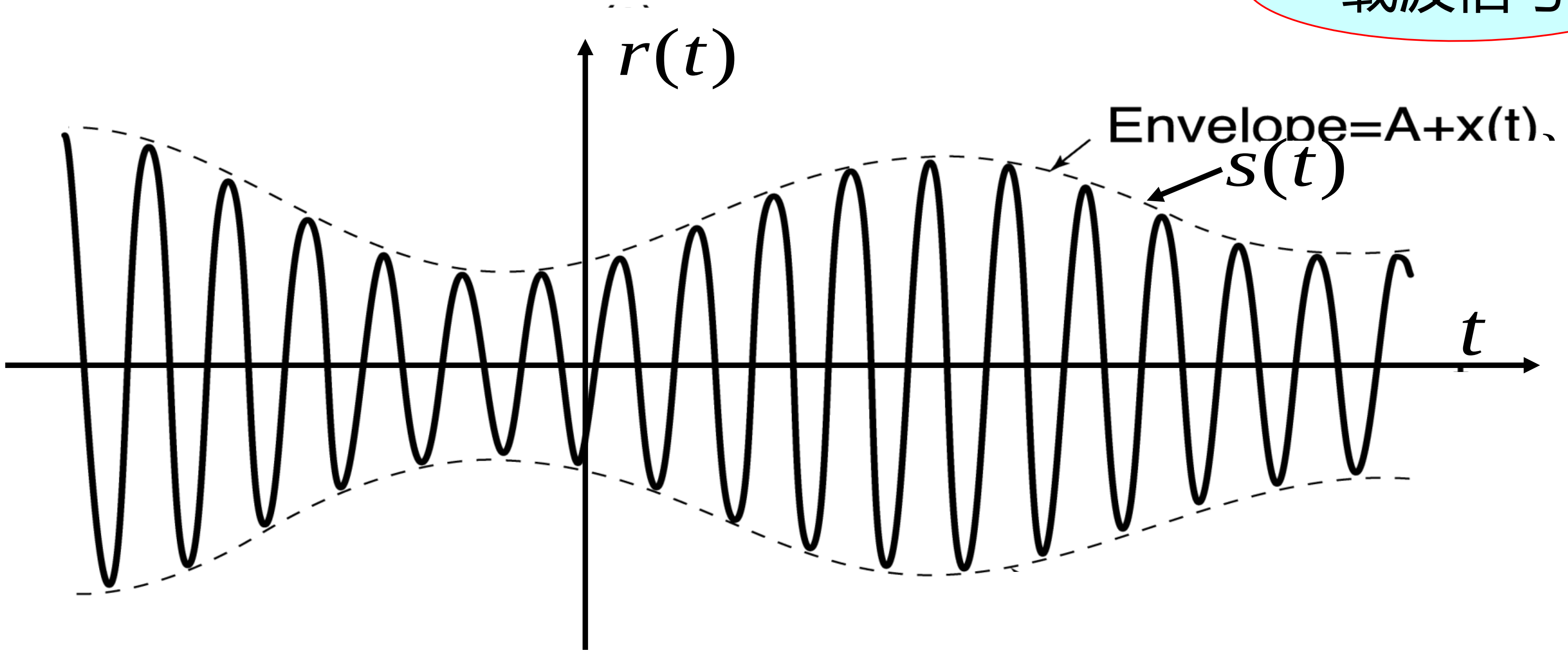
$$x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$$

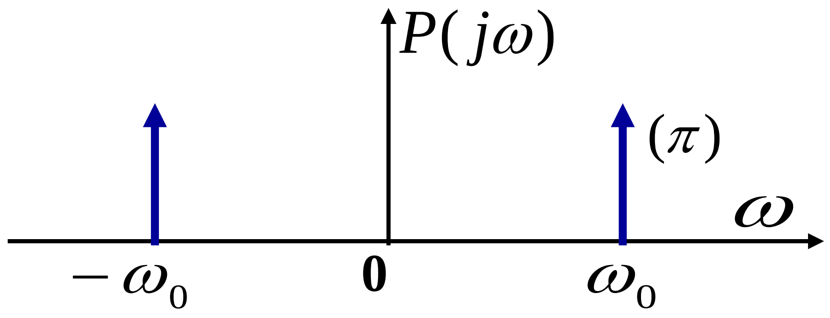
$$x_1(t) x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

正弦幅度调制



$$p(t) = \cos \omega_0 t$$

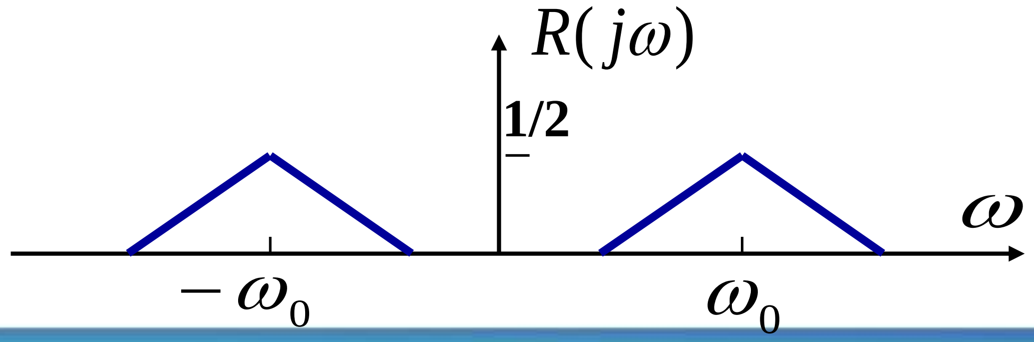




$$P(j\omega)=\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$R(j\omega)=\frac{1}{2\pi}S(j\omega)*\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

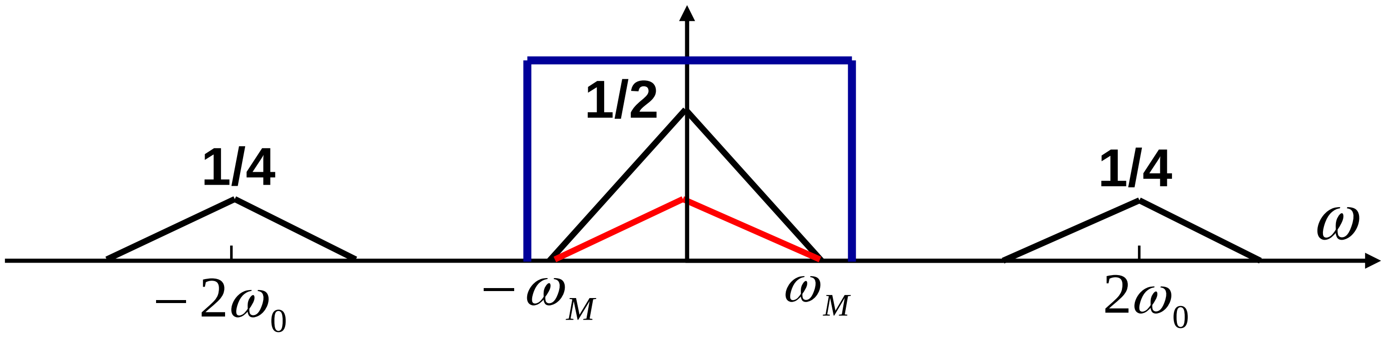
$$=\frac{1}{2}S\left[j(\omega-\omega_0)\right]+\frac{1}{2}S[j(\omega+\omega_0)]$$



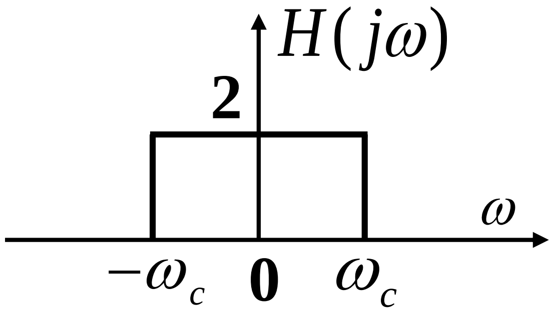
同步解调

$$r(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}R(j\omega)*\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$=\frac{1}{2}S(j\omega)+\frac{1}{4}S[j(\omega-2\omega_0)]+\frac{1}{4}S[j(\omega+2\omega_0)]$$

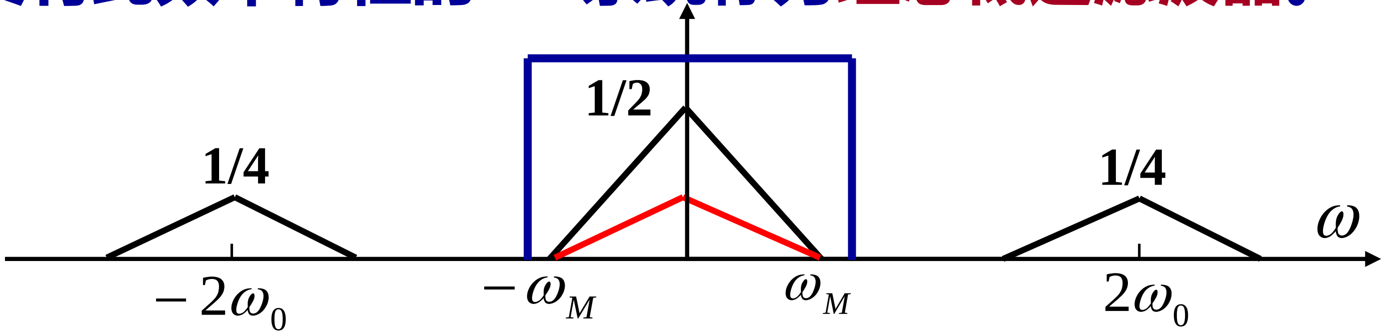


此时，用一个频率特性为 $H(j\omega)$ 的系统即可从$r(t)$恢复出 $s(t)$。

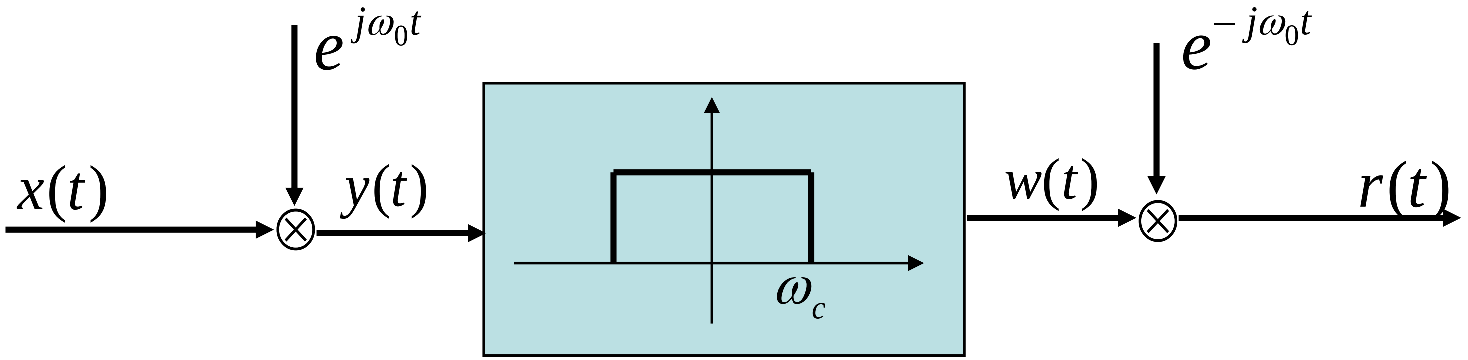


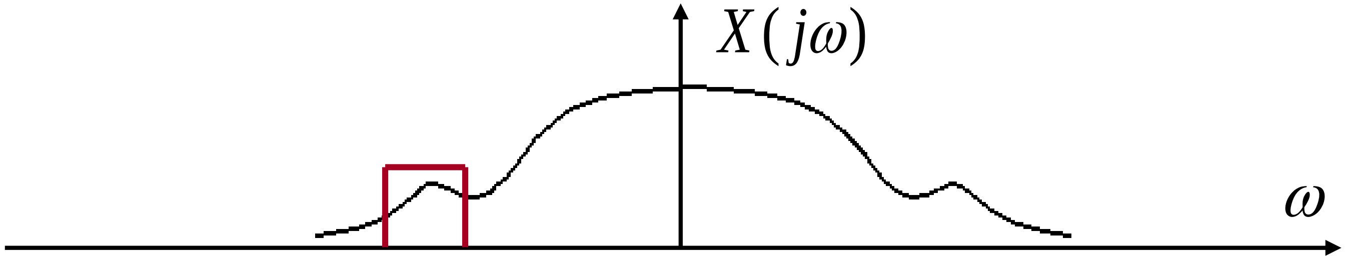
只要 $\omega_M < \omega_c < 2\omega_0 - \omega_M$ 即可。

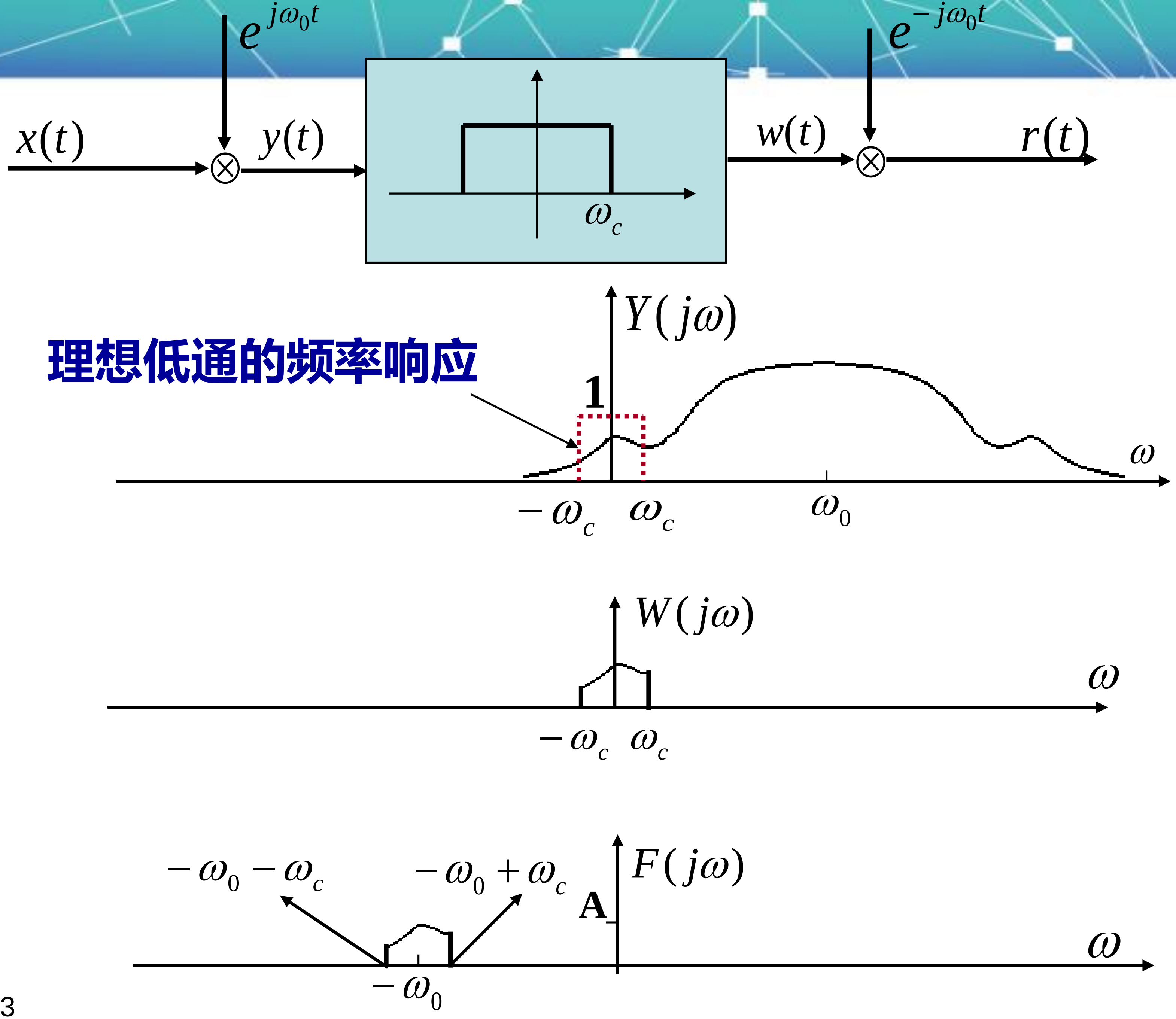
具有此频率特性的LTI系统称为理想低通滤波器。



可变中心频率的频率选择性滤波







$e^{j\omega_0 t}$
$e^{-j\omega_0 t}$
$x(t)$
$y(t)$
$w(t)$
$r(t)$
ω_c
$Y(j\omega)$
理想低通的频率响应
1
ω
$-\omega_c$
ω_c
ω_0
$W(j\omega)$
ω
$-\omega_c$
ω_c
$-\omega_0-\omega_c$
$-\omega_0+\omega_c$
A
$F(j\omega)$
ω
$-\omega_0$

LTI系统其输入输出关系可以由一个线性常系数微分方程描述：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

例：
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$$

$$H(j\omega)=\frac{j\omega+3}{(j\omega)^2+6(j\omega)+8}=\frac{j\omega+3}{(4+j\omega)(2+j\omega)}$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2+j\omega}+\frac{1}{4+j\omega}]$$

$$h(t)=\frac{1}{2}[e^{-2t}+e^{-4t}]u(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t) \qquad x(t)=e^{-t}u(t)\text{，求 } y(t)\text{。}$$

$$H(j\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}$$

$$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)=\left[\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}\right].\left[\frac{1}{j\omega+1}\right]$$

$$=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)}.$$

$$Y(j\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)}$$

$$Y(j\omega)=\frac{A_{11}}{(j\omega+1)^2}+\frac{A_{12}}{j\omega+1}+\frac{A_2}{j\omega+3}$$

$$A_{11}=(j\omega+1)^2Y(j\omega)\Big|_{j\omega=-1}=\frac{1}{2}$$

$$A_{12}=\frac{d}{d(j\omega)}\left\{(j\omega+1)^2Y(j\omega)\right\}\Big|_{j\omega=-1}=\frac{1}{4}$$

$$A_2=(j\omega+3)Y(j\omega)\Big|_{j\omega=-3}=-\frac{1}{4}$$

$$Y(j\omega)=\frac{\frac{1}{2}}{(j\omega+1)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{j\omega+1}+\frac{-\frac{1}{4}}{j\omega+3}$$

$$y(t)=\left[\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-3t}\right]u(t)$$