

第3章 周期信号的傅里叶级数表示

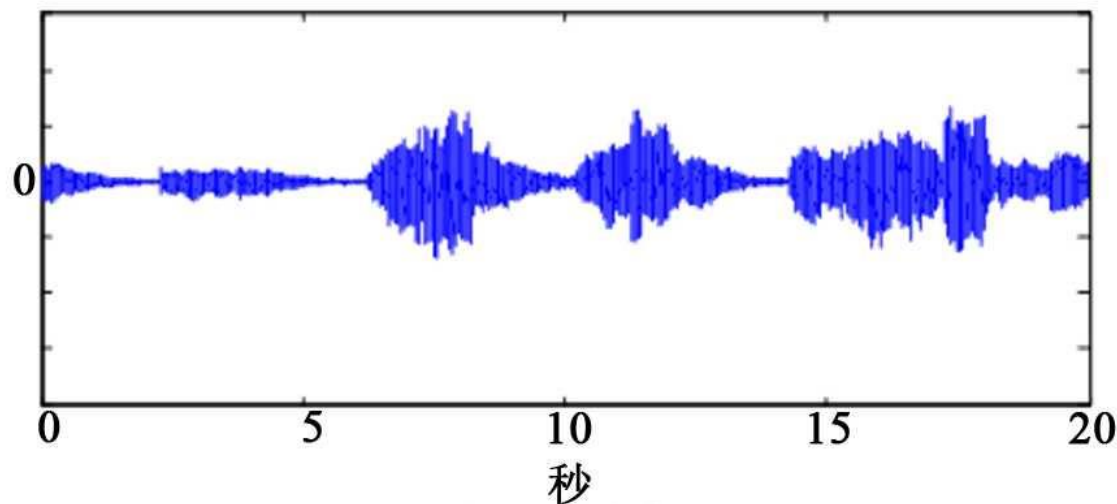
$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau - \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{t-\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau$$

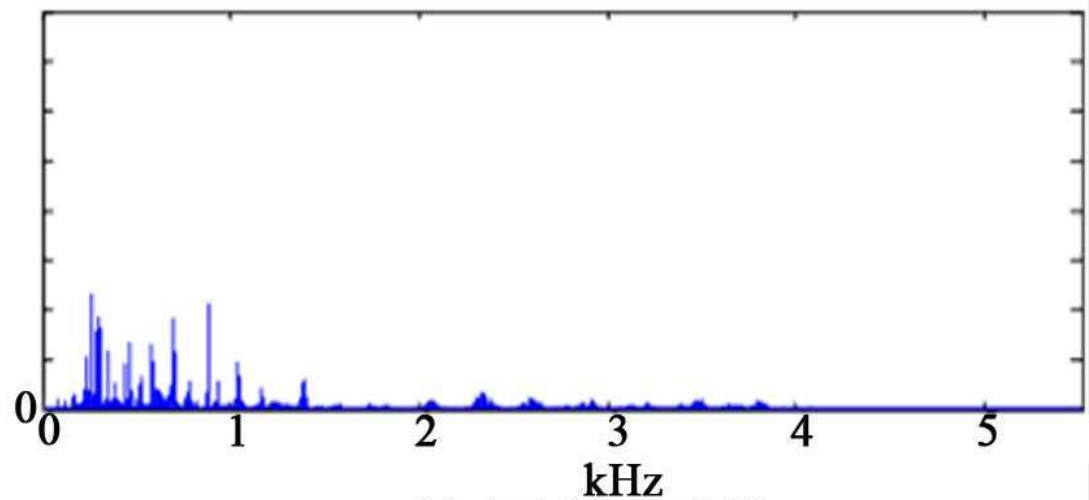
$$= \frac{1}{T} x(t) * u\left(t + \frac{T}{2}\right) - \frac{1}{T} x(t) * u\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$= x(t) * \frac{1}{T} \left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right]$$

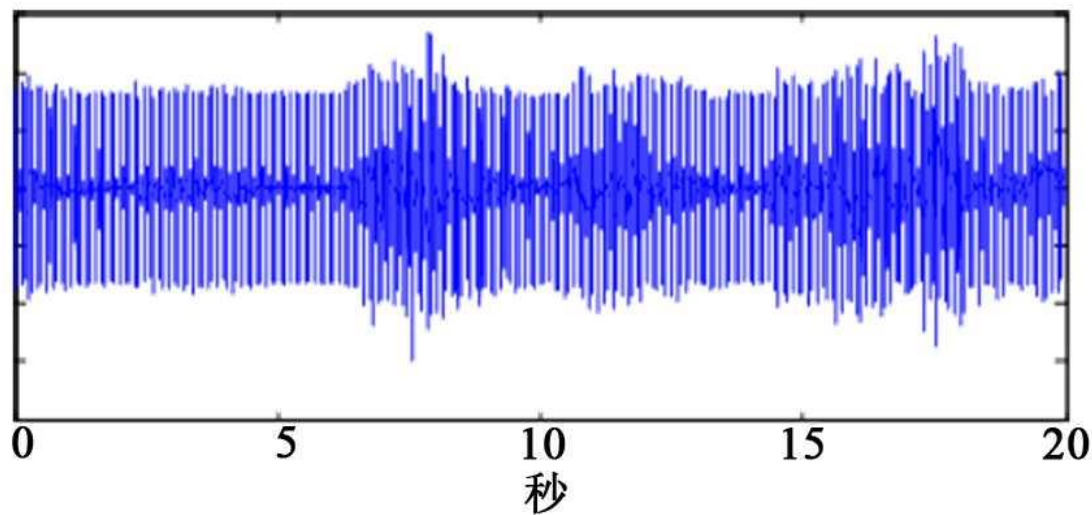
为何引入频域?



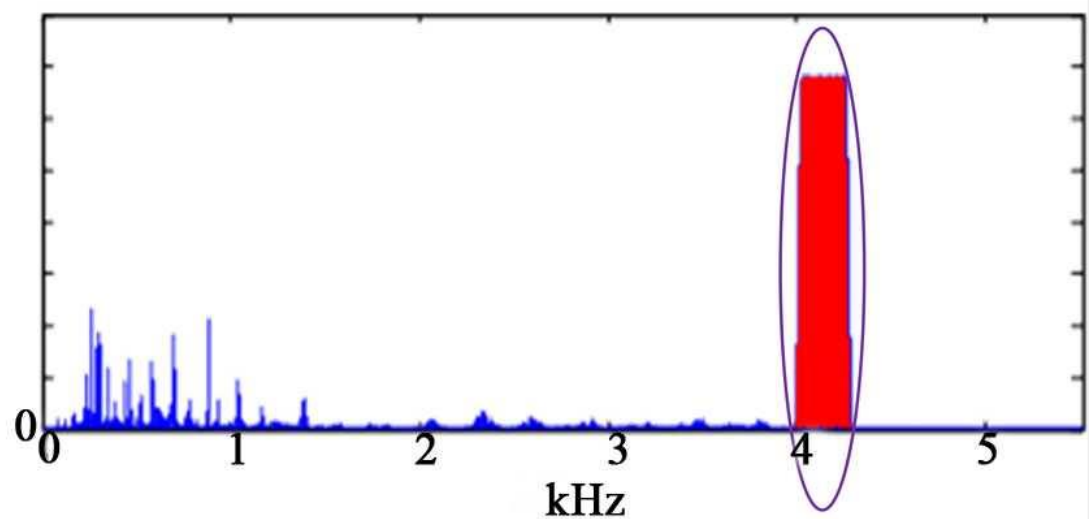
信号的时域波形



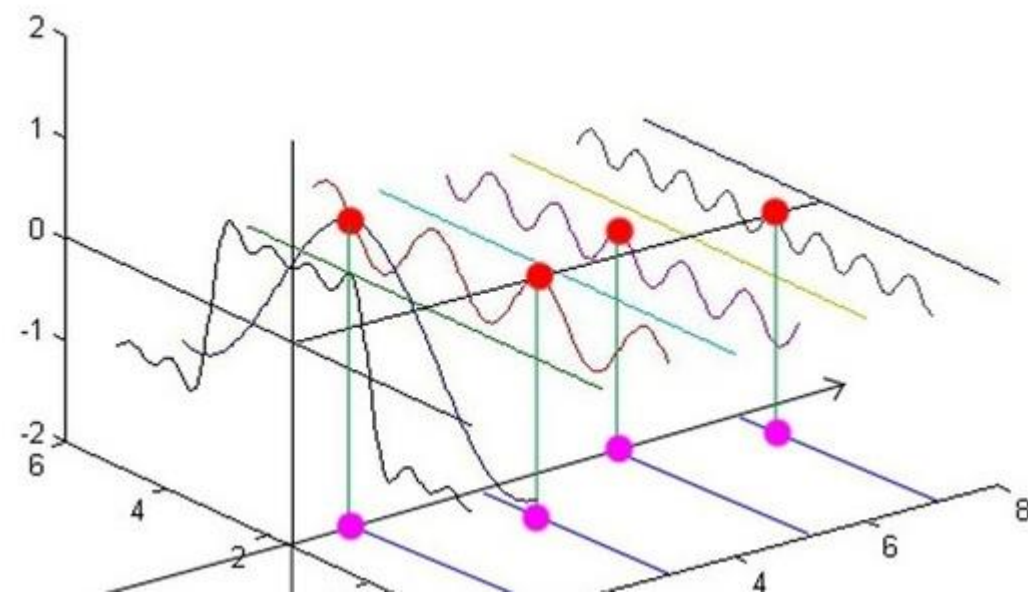
信号的频谱



含噪信号的时域波形



含噪信号的频谱



从本章开始由时域转入变换域分析，首先讨论傅里叶级数。将信号进行正交分解，即分解为三角函数或复指数函数的组合。

频域分析将时间变量变换成频率变量，揭示了信号内在的频率特性以及信号时间特性与其频率特性之间的密切关系，从而导出了信号的频谱、带宽以及滤波、调制和频分复用等重要概念。

发展历史

- 1822年，法国数学家傅里叶(J.Fourier,1768-1830)在研究热传导理论时发表了“热的分析理论”，提出并证明了将周期函数展开为正弦级数的原理，奠定了傅里叶级数的理论基础。
- 泊松(Poisson)、高斯(Guass)等人把这一成果应用到电学中去，得到广泛应用。
- 19世纪末，人们制造出用于工程实际的电容器。
- 进入20世纪以后，谐振电路、滤波器、正弦振荡器等一系列具体问题的解决为正弦函数与傅里叶分析的进一步应用开辟了广阔的前景。
- 在通信与控制系统的理论研究和工程实际应用中，傅里叶变换法具有很多的优点。
- “FFT”快速傅里叶变换为傅里叶分析法赋予了新的生命力。

□ 时域分析方法的基础：

1) 信号在时域的分解。

2) LTI系统满足线性、时不变性。

❖ 从分解信号的角度出发，基本信号单元必须满足两个要求：

1.本身简单，LTI系统对它的响应能简便得到。

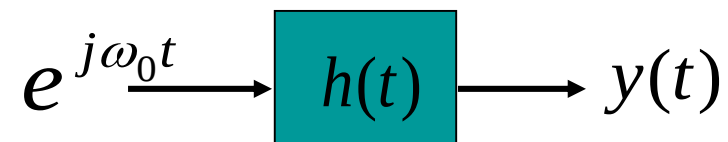
2.具有普遍性，能够用以构成相当广泛的信号。

- **问题：除了单位脉冲函数和单位冲激函数之外，函数有没有其他的分解方法？**
- **频域分析：以复指数信号作为信号分解的基本单元**

3.2 LTI系统对复指数信号的响应

□ 考查LTI系统对复指数信号的响应

由时域分析方法有,



$$y(t) = e^{j\omega_0 t} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = e^{j\omega_0 t} H(\omega_0)$$

$$H(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau$$

□ 特征函数和特征值

- ✓ 如果系统对某一信号的响应是该信号乘以一个常数，则称该信号是这个系统的**特征函数**。
- ✓ 系统对该信号加权的常数称为系统与特征函数相对应的**特征值**。

□ 结论

- ✓ 复指数函数 $e^{j\omega t}$ 是一切LTI系统的特征函数。
 $H(\omega)$ 是LTI系统与复指数信号相对应的特征值。
- ✓ 只有复指数函数才能成为一切LTI系统的特征函数

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

利用系统的齐次性与叠加性

$$\text{由于 } e^{s_1 t} \rightarrow H(s_1)e^{s_1 t} \quad e^{s_2 t} \rightarrow H(s_2)e^{s_2 t}$$

$$e^{s_3 t} \rightarrow H(s_3)e^{s_3 t}$$

所以有

$$x(t) \longrightarrow y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

即：

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \longrightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \longrightarrow y[n] = \sum_k a_k H[z_k] z_k^n$$

问题：究竟有多大范围的信号可以用复指数信号的线性组合来表示？

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

(一) 三角函数形式级数展开 (正交函数集 $\sin \omega t$ 、 $\cos \omega t$)

周期信号 $x(t)$, 周期为 T , 频率 $f = \frac{1}{T}$, 角频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

当: { 信号周期内间断点数有限
信号周期内极大/极小值数目有限 $\Rightarrow$ Dirichlet 条件
一周期内信号可积 $\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt < \infty$

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad \text{直流分量}$$

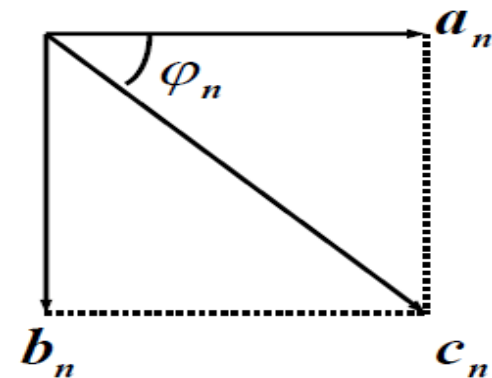
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad \text{余弦分量}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad \text{正弦分量}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n}$$



3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

(二) 指数函数形式级数展开 (正交函数集 $e^{jn\omega t}$)

$$e^{jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t$$

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})$$

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

$$\begin{aligned}x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right) \\&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_0 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_0 t} \right) \\&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n e^{jn\omega_0 t} + F_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \right) \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt\end{aligned}$$

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n e^{jn\omega_0 t} + F_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \right)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \quad (3.38)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk(2\pi/T)t} dt \quad (3.39)$$

周期连续时间信号的傅里叶级数（周期连续信号傅里叶变换）

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

这表明用傅里叶级数可以表示连续时间周期信号，

即：连续时间周期信号可以分解成无数多个复指数谐波分量。

a_k 称为傅里叶级数的系数

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

例1:
$$x(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

显然该信号中，有两个谐波分量， $a_{\pm 1} = \frac{1}{2}$ 为相应分量的加权因子，即傅里叶系数。

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

例2: $x(t) = \cos \omega_0 t + 2 \cos 3\omega_0 t$

$$= \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] + e^{j3\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t}$$

在该信号中，有四个谐波分量，即 $k = \pm 1, \pm 3$ ，
时对应的谐波分量。

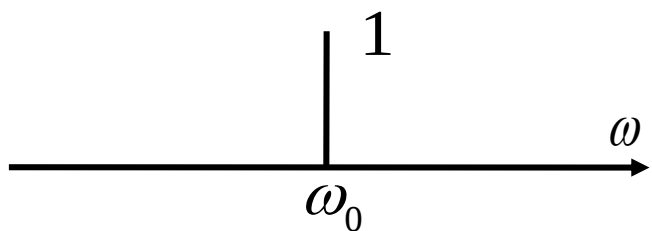
□ 频谱的概念

在傅里叶级数中，各个信号分量（谐波分量）间的区别也仅仅是幅度（可以是复数）和频率不同。因此，可以用一根线段来表示某个分量的幅度，用线段的位置表示相应的频率。

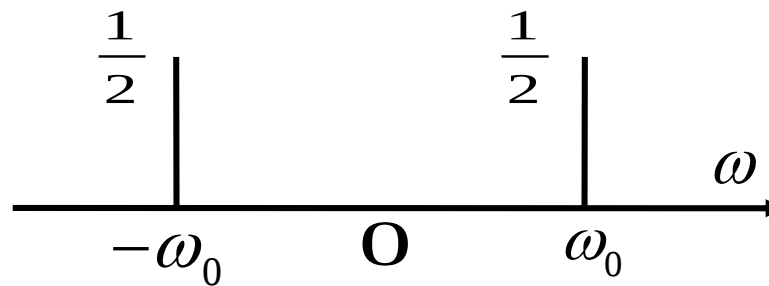
3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

▣ 频谱的概念

分量 $e^{j\omega_0 t}$ 可表示为



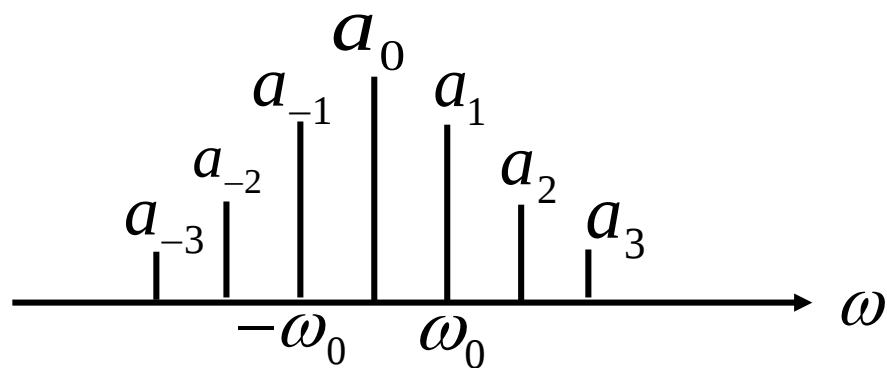
$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$ 表示为



3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

因此，当把周期信号 $x(t)$ 表示为傅里叶级数

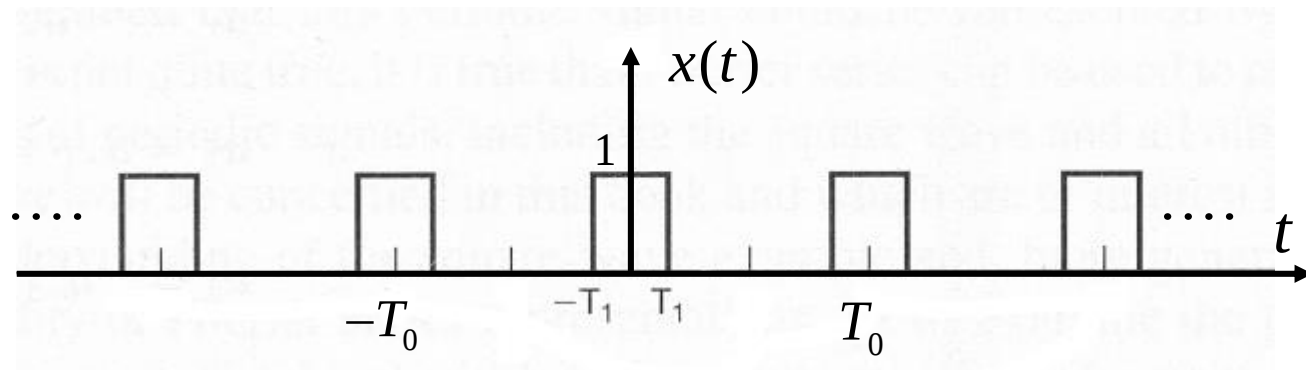
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \text{ 时，就可以将 } x(t) \text{ 表示为}$$



这样绘出的图称为**频谱图**

由于**信号的频谱完全代表了信号**，研究它的频谱就等于研究信号本身。因此，这种表示信号的方法称为**频域表示法**。

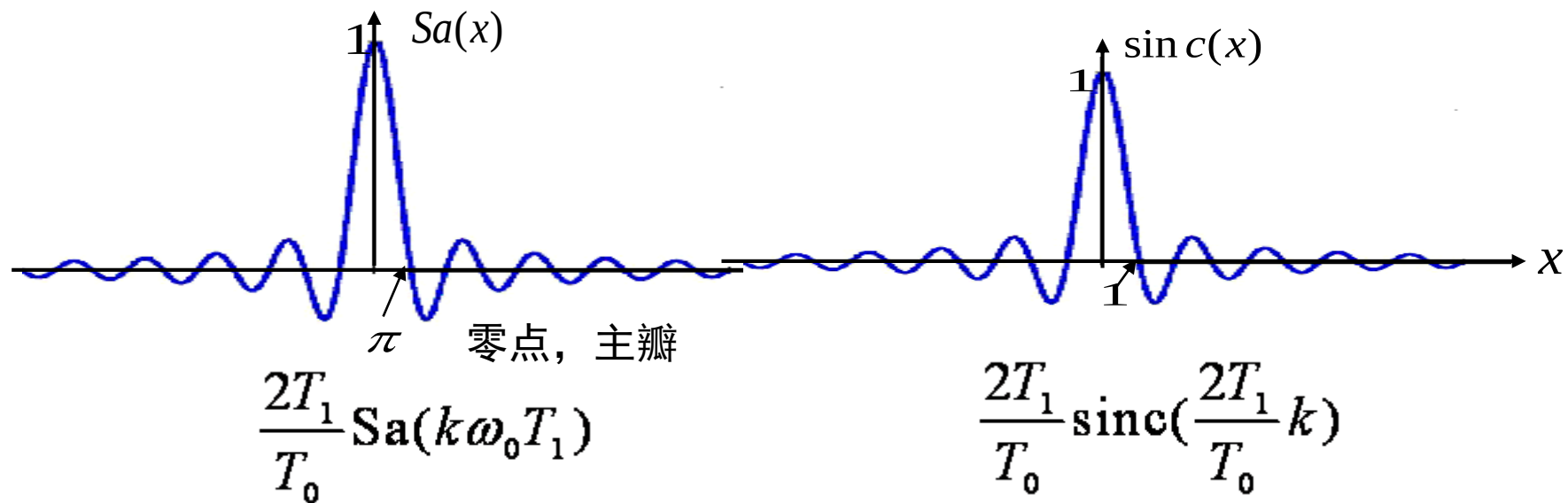
□ 周期矩形脉冲的傅里叶级数

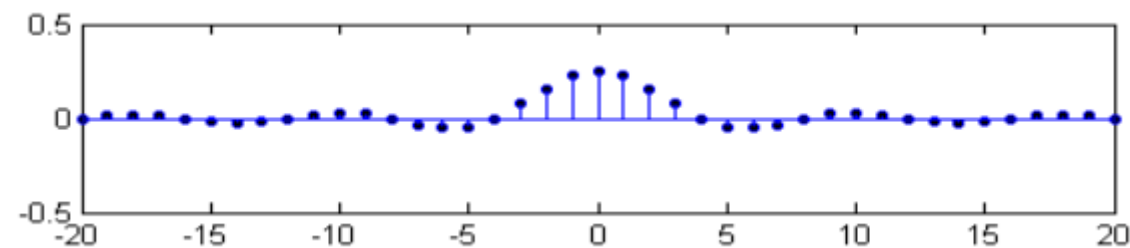
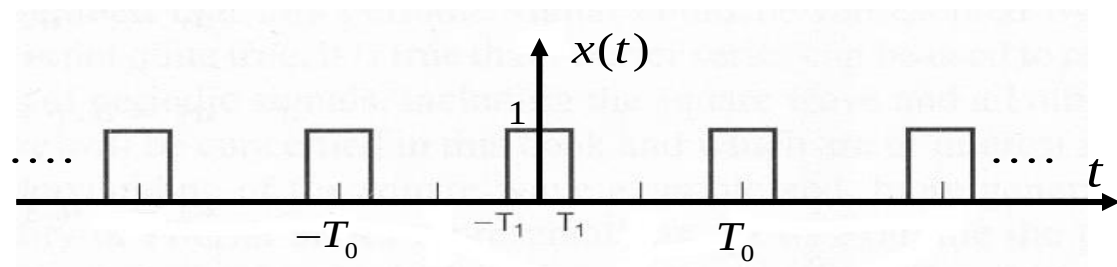


$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = -\frac{1}{jk\omega_0 T_0} [e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{jk\omega_0 T_1}] = \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_0} \\ &= \frac{2T_1}{T_0} \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_1} = \frac{2T_1}{T_0} \text{Sa}(k\omega_0 T_1) = \frac{2T_1}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{2T_1}{T_0} k\right) \end{aligned}$$

其中

$$\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

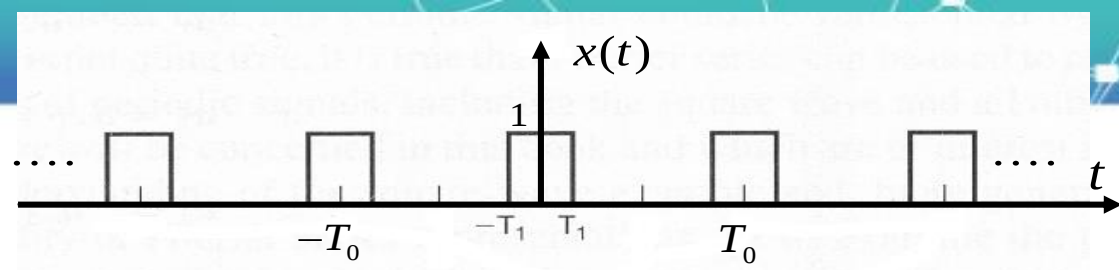




周期性矩形脉冲信号的频谱特征：

1. 离散性
2. 谐波性
3. 收敛性

考查周期 T_0 和脉冲宽度 $2T_1$ 改变时频谱的变化：



$$a_k = \frac{2T_1}{T_0} \text{Sa}(k\omega_0 T_1)$$

T_1 不变 $T_0 \uparrow$ 时

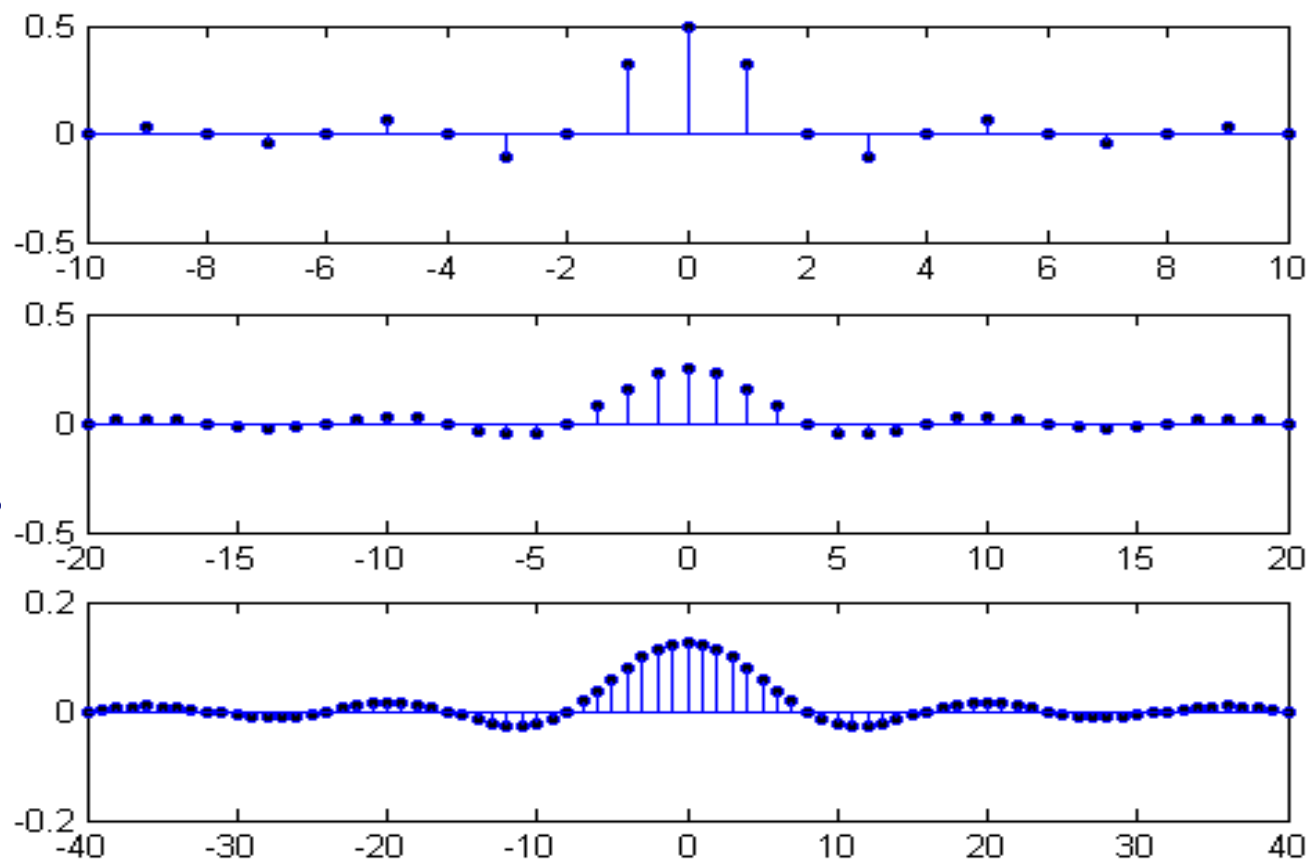
占空比

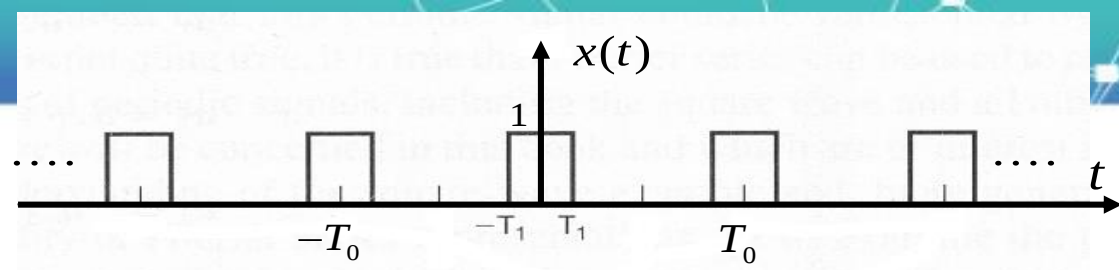
$$\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{4}$$

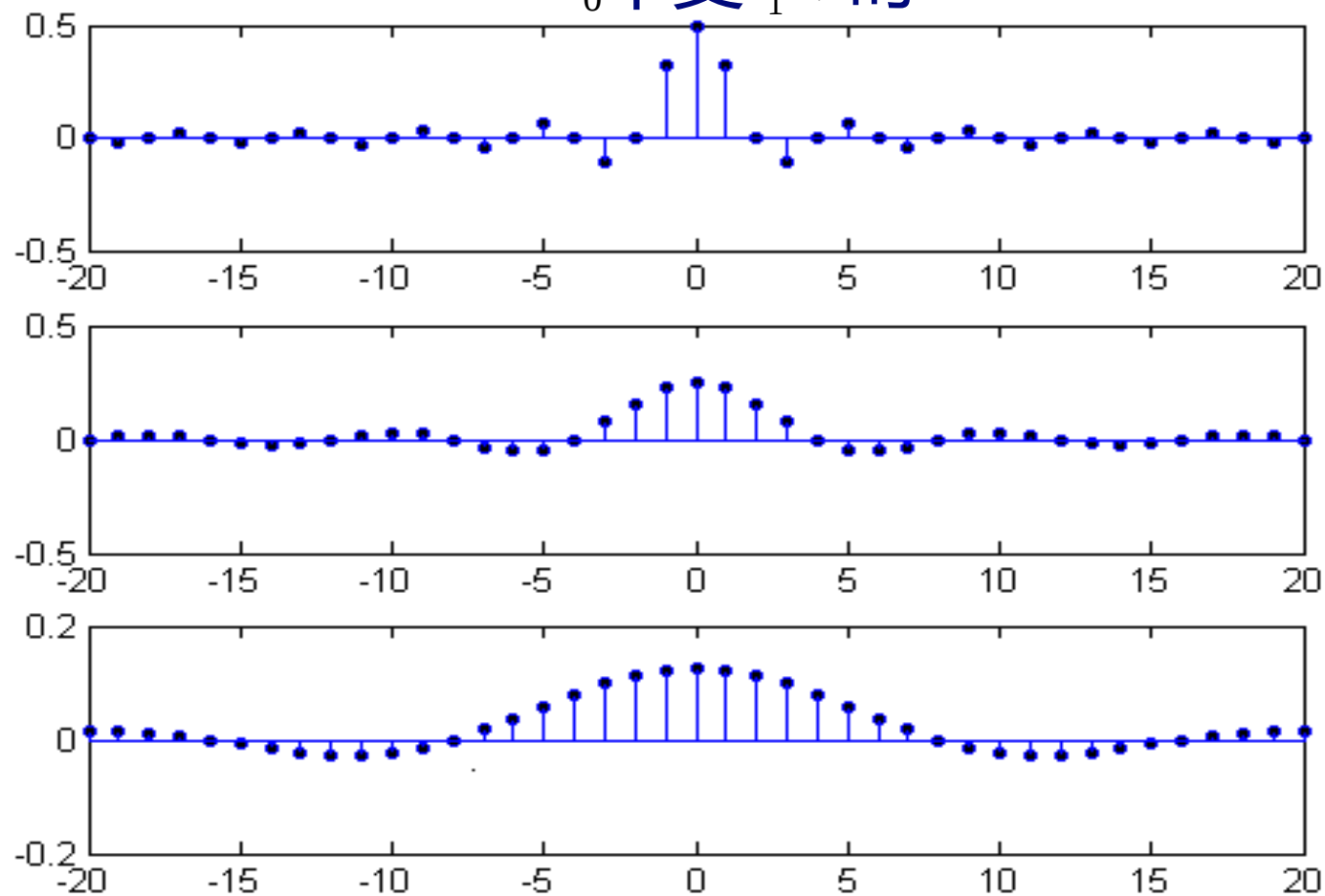
$$\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{8}$$

1、当 T_1 不变, 改变 T_0 时, 随 $T_0 \uparrow$ 使占空比减小, 谱线间隔变小, 幅度下降。但频谱包络的形状不变, 包络主瓣内包含的谐波分量数增加。





T_0 不变 $T_1 \downarrow$ 时



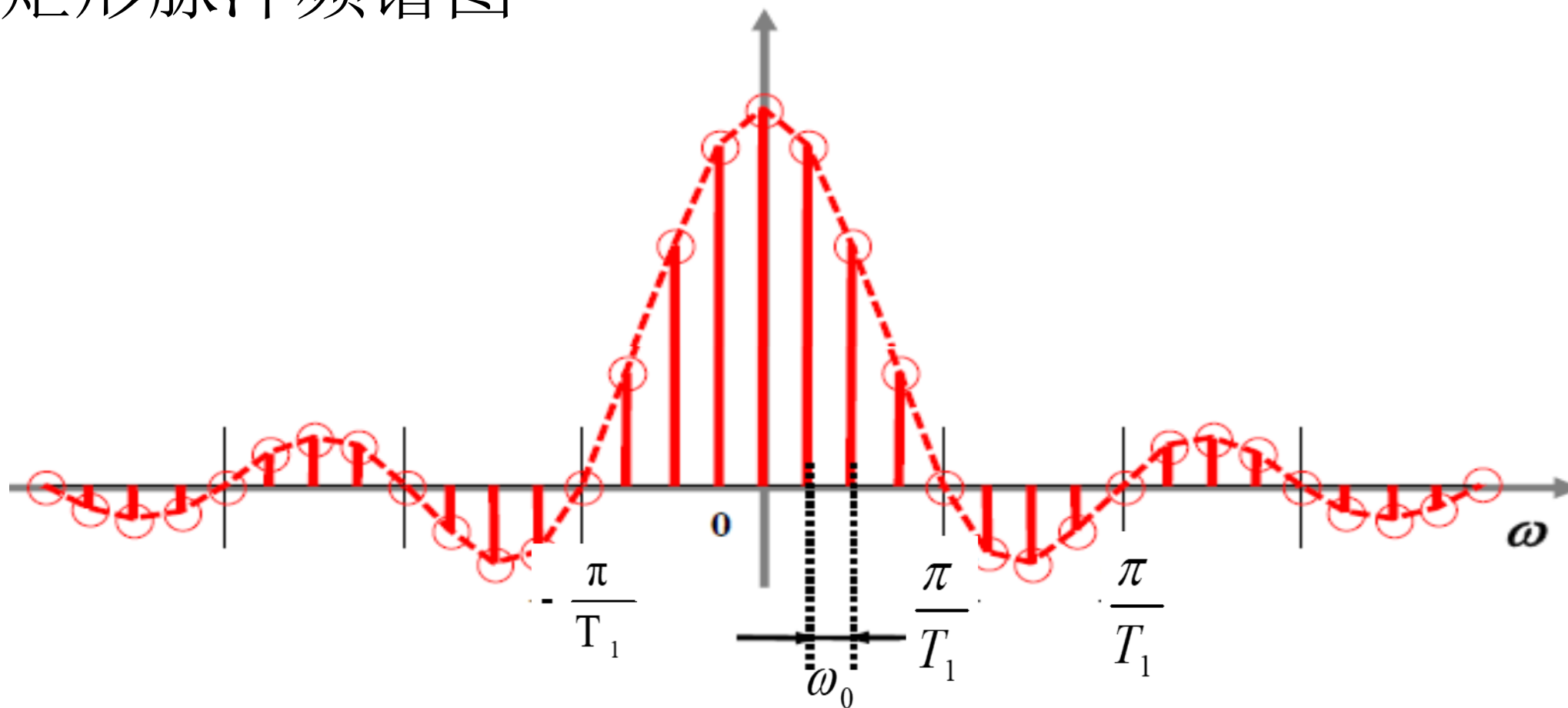
占空比

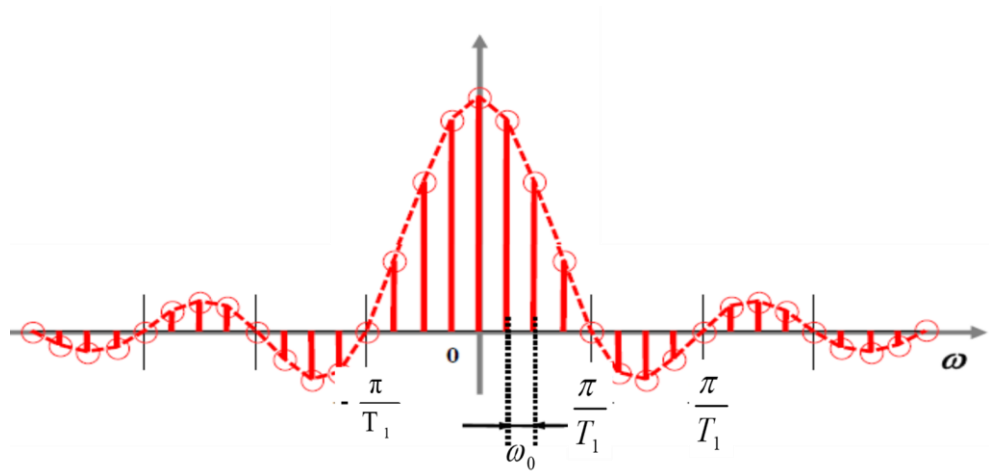
$$\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{8}$$

周期矩形脉冲频谱图





连续周期信号的频谱离散，谱线间隔 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

连续周期信号周期越长，谱线越密

连续非周期信号（周期无穷大），谱线连续



第四章 连续时间傅里叶变换

零点 $\omega = \frac{m\pi}{T_1}$ ，能量主要集中在第一个零点内（主瓣）

▣ 信号对称性与频谱的关系

当 $x(t) = x(-t)$ 且为实信号时, 有

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) [\cos(k\omega_0 t) - j \sin(k\omega_0 t)] dt \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos k\omega_0 t dt \end{aligned}$$

表明实偶信号的 a_k 是关于 k 的偶函数、实函数。

▣ 信号对称性与频谱的关系

当 $x(t) = -x(-t)$ 且为实信号时, 有

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) [\cos(k\omega_0 t) - j \sin(k\omega_0 t)] dt \\ &= -j \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin k\omega_0 t dt \end{aligned}$$

表明实奇信号的 a_k 是关于 k 的奇函数、虚函数。

3.4

连续傅里叶级数的收敛性

▣ 傅里叶级数是对信号的**最佳近似**

若 以 T_0 为周期

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

用有限个谐波分量近似 $x(t)$ 时, 有

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$$

误差为 $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$

误差为 $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$

以均方误差作为衡量误差的准则，其均方误差为

$$\begin{aligned} E_N(t) &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |e_N(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t) - x_N(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left[x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \right] \left[x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \right]^* dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left[x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \right] \left[x^*(t) - \sum_{k=-N}^N a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \right] dt \end{aligned}$$

在均方误差最小的准则下，可以证明，此时 a_k 应满足：

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

—— 这就是傅氏级数的系数

结论：在均方误差最小的准则下，傅里叶级数是对周期信号的最佳近似。

如果 $x(t)$ 存在傅里叶级数展开式，随着 $N \rightarrow \infty$

E_N 的极限也趋近于0。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0$$

傅里叶级数是在 $\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0$ 意义上对原先信号的最佳近似。而不是信号在每一个 t 点上都和原先的信号相等。而只表示两者在能量上没有差别。

没有任何间断点的周期信号，在每一点上级数收敛于原来信号 $x(t)$ 。

有有限个不连续点的时候，其余所有点都等于原来信号，但在不连续点处傅里叶级数收敛于不连续点处值的平均值。

傅里叶级数收敛的两层含义：

- ① a_k 是否存在？
- ② 级数是否收敛于 $x(t)$ ？

大部分的周期信号都是收敛的。

1. 平方可积条件：

如果 $\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$ ，则 a_k 必存在。

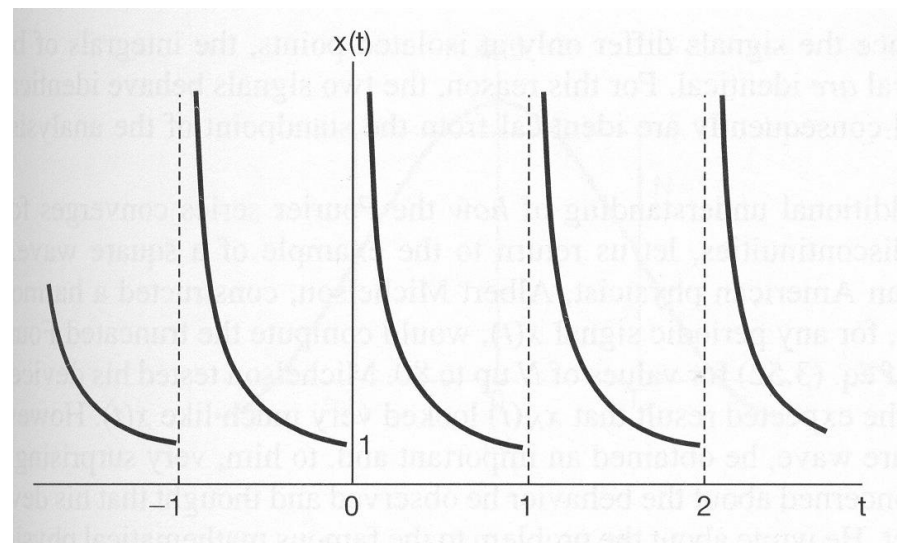
▣ 傅里叶级数的收敛性

2. Dirichlet条件:

① $\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$, 在任何周期内信号绝对可积。

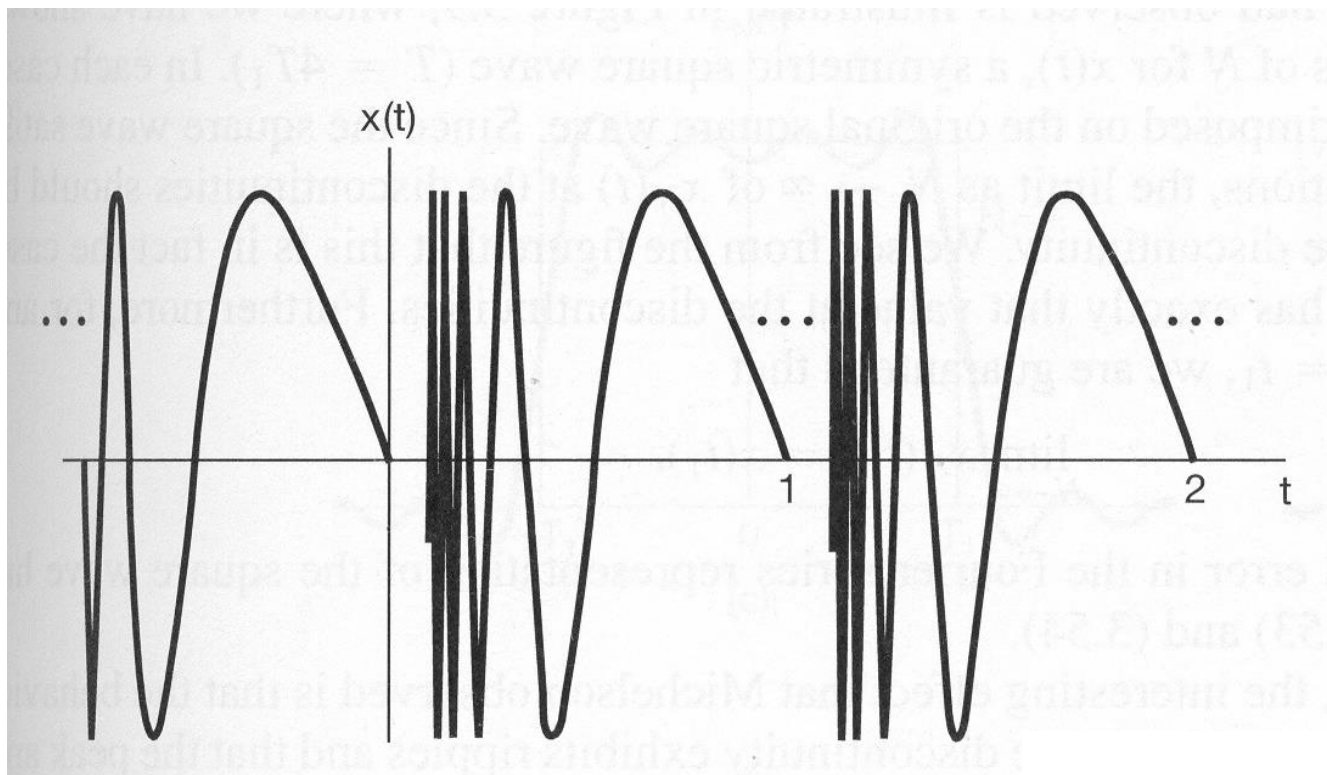
$$|a_k| \leq \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)e^{-jk\omega_0 t}| dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

因此, 信号绝对可积就保证了 a_k 的存在。



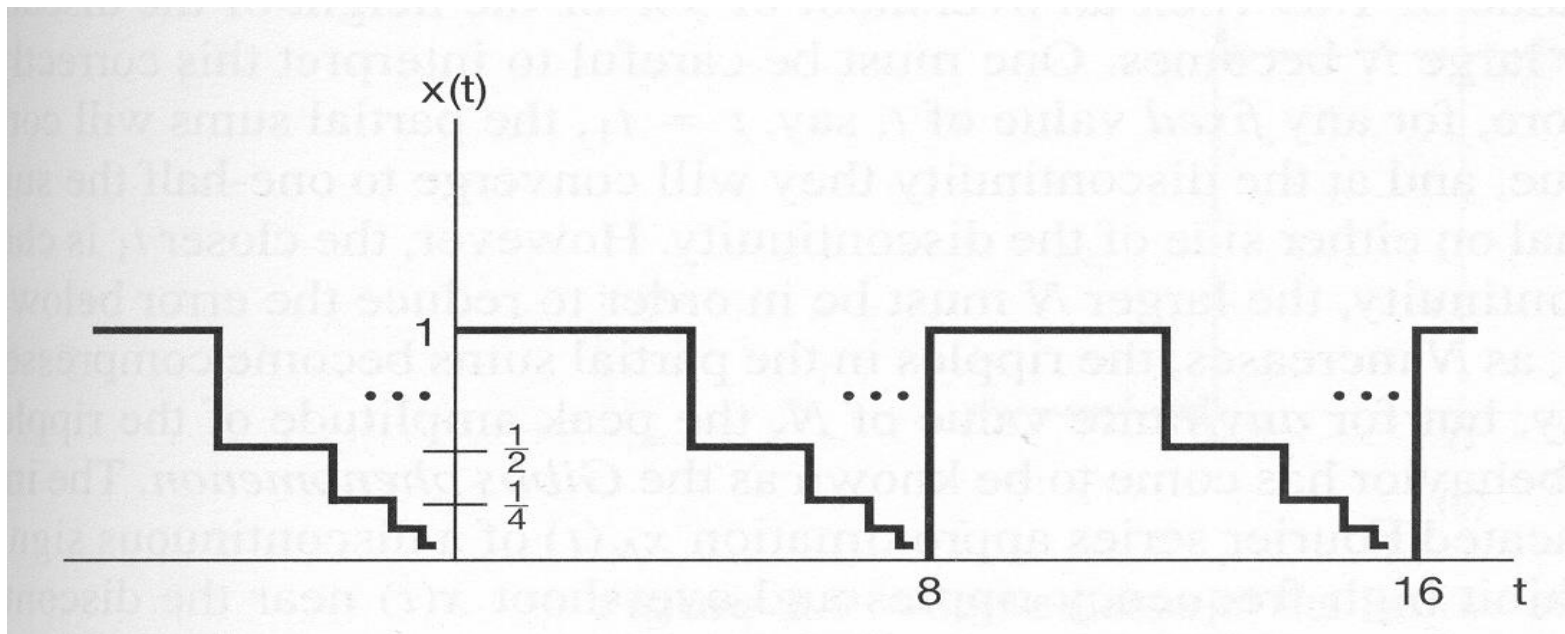
$$x(t) = \frac{1}{t}, 0 < t \leq 1 \text{ with period } 1$$

② 在任何有限区间内, $x(t)$ 具有有限个起伏变化。



$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \leq 1 \quad \text{with period } 1$$

③在任何有限区间内，只有有限个不连续点，而且在这些不连点上，函数具有有限值。

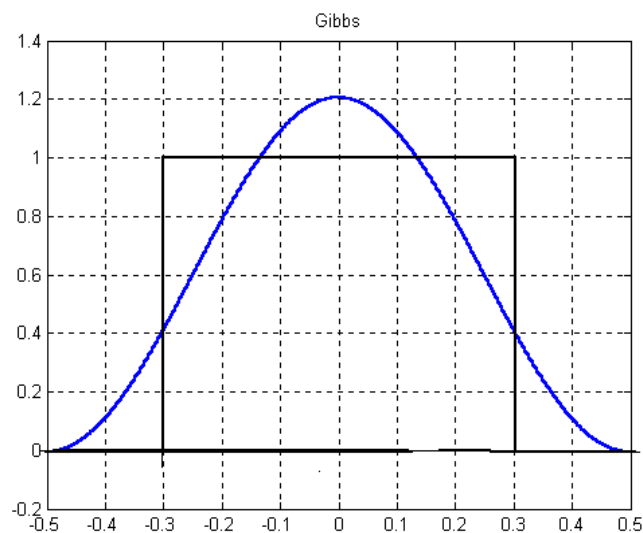


▣ 吉伯斯 (Gibbs) 现象

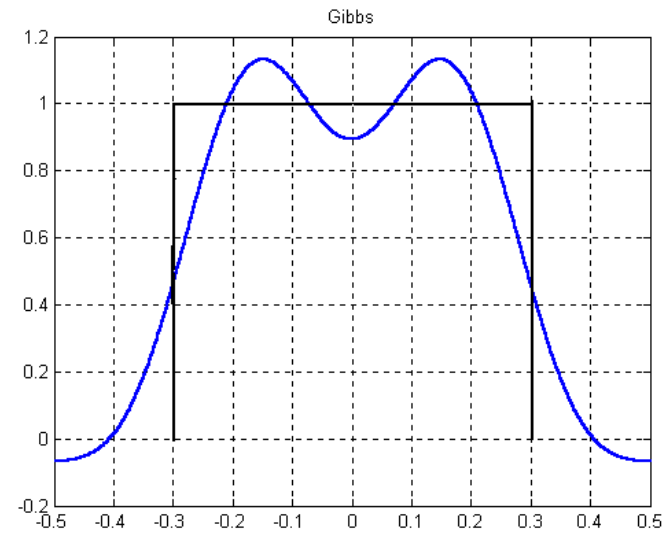
满足 Dirichlet 条件的信号，其傅里叶级数是如何收敛于 $x(t)$ 的。特别当具有间断点时，在间断点附近，如何收敛于 $x(t)$ ？

以方波为例

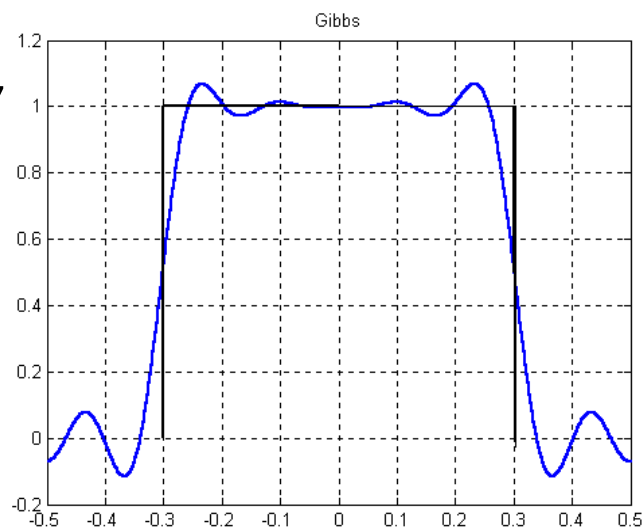
$N = 1$



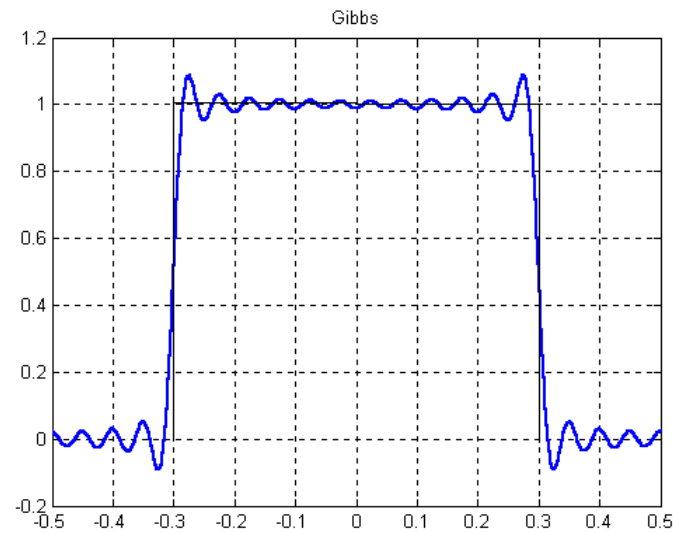
$N = 3$

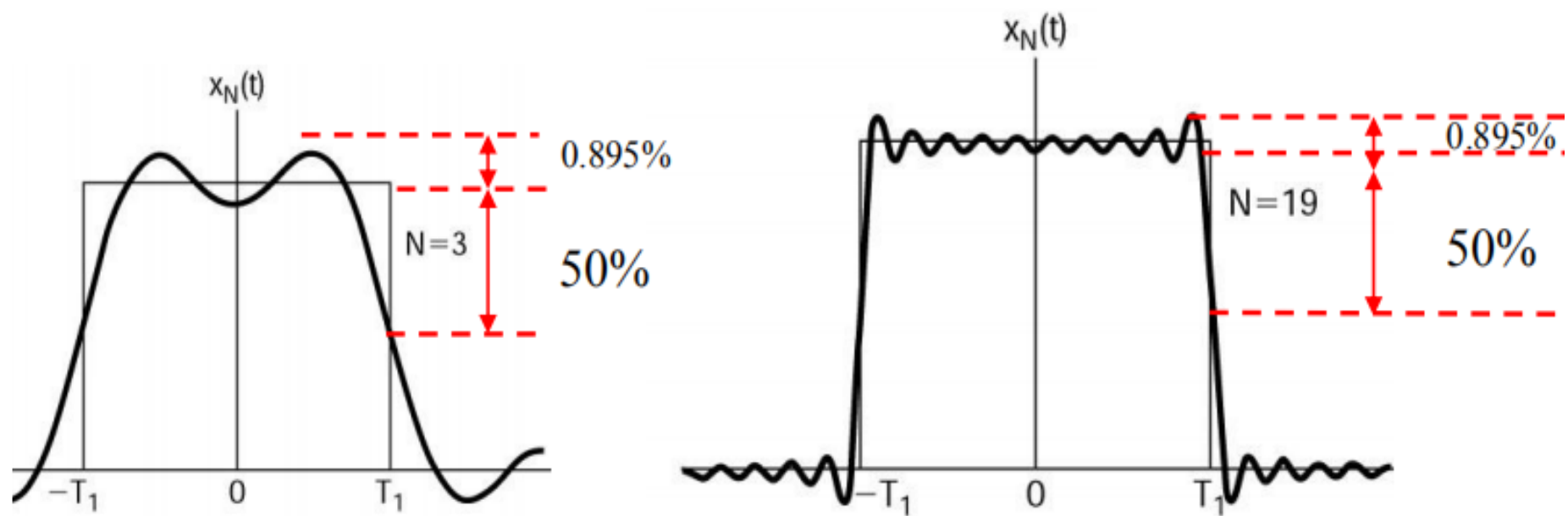


$N = 7$



$N = 19$





Gibbs现象表明：

用有限项傅里叶级数表示有间断点的信号时，在间断点附近不可避免的会出现振荡和超量。超量的幅度不会随所取项数的增加而减小。只是随着项数的增多，振荡频率变高，并向间断点处压缩，从而使它所占有的能量减少。

3.5

连续时间傅里叶级数的性质

□ 1、线性性质

强调同周期
不同周期如何？

若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是以 T 为周期的信号，且

$$x(t) \xleftrightarrow{F} a_k \quad y(t) \xleftrightarrow{F} b_k$$

则 $Ax(t) + By(t) \xleftrightarrow{F} Aa_k + Bb_k$

□ 2、时移性质

模不变
相位变化

若 $x(t)$ 是以 T 为周期的信号，且 $x(t) \xleftrightarrow{F} a_k$

则 $x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} a_k e^{-jk\omega_0 t_0} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

▣ 3、时间反转性质

若 $x(t)$ 是以 T 为周期的信号, 且 $x(t) \xleftrightarrow{F} a_k$
则 $x(-t) \xleftrightarrow{F} a_{-k}$

□ 4、尺度变换性质

若 $x(t)$ 是以 T 为周期的信号, 且 $x(t) \xleftrightarrow{F} a_k$

则 $x(at)$ 以 T/a 为周期, 于是

$$x(at) \xleftrightarrow{F} b_k = \frac{a}{T} \int_{T/a} x(at) e^{-jka\omega_0 t} dt$$

令 $at = \tau$, 当 t 在 $0 \sim T/a$ 变化时, τ 从 $0 \sim T$ 变化,

于是有:
$$b_k = \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau = a_k$$

$$\therefore x(at) \xleftrightarrow{F} b_k = a_k$$

▣ 5、相乘性质

若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是以 T 为周期的信号, 且

$$x(t) \xleftrightarrow{F} a_k \quad y(t) \xleftrightarrow{F} b_k$$

则 $x(t)y(t) \longleftrightarrow C_k = \frac{1}{T} \int_T x(t)y(t)e^{-jk\omega_0 t} dt$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_T \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{jl\omega_0 t} y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$C_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \frac{1}{T} \int_T y(t) e^{-j(k-l)\omega_0 t} dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} = a_k * b_k$$

▣ 6、周期卷积

$$x(t) \xleftrightarrow{F} a_k \quad y(t) \xleftrightarrow{F} b_k$$

$$x(t) \circledast y(t) = \int_T x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

$$\frac{1}{T} h_k = \frac{1}{T} \int_T \left[\frac{1}{T} \int_T x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right] e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} h_k &= \frac{1}{T} \int_T x(\tau) \left[\frac{1}{T} \int_T y(t - \tau) e^{-jk\omega_0(t - \tau)} dt \right] e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \\ &= b_k a_k \end{aligned}$$

▣ 7、频移性质

$$e^{jkM\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{Fs} a_{k-M}$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_T e^{jM\omega_0 t} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j(k-M)\omega_0 t} dt = a_{k-M}$$

▣ 8、微分性质

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{Fs} (jk\omega_0) a_k$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [a_k e^{jk\omega_0 t}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_k (jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}]$$

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \xleftrightarrow{Fs} (jk\omega_0)^n a_k$$

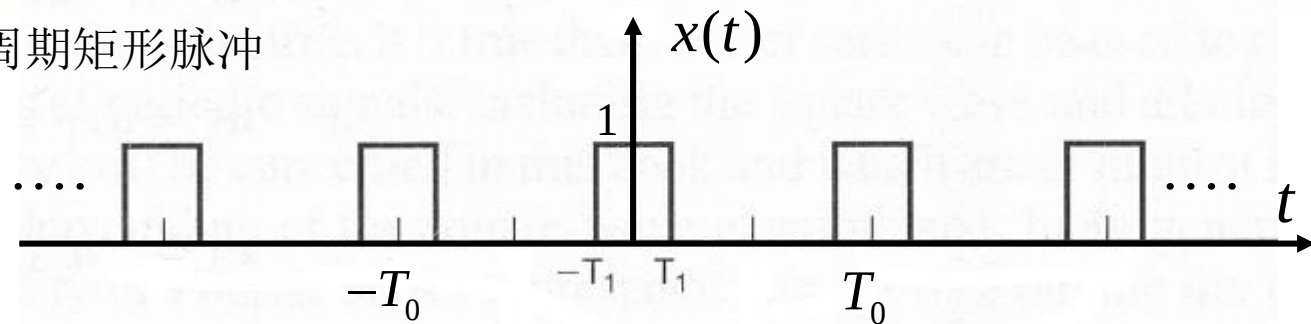
▣ 9、积分性质

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$
$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{(jk\omega_0)} a_k$$
$$a_0 = ?$$

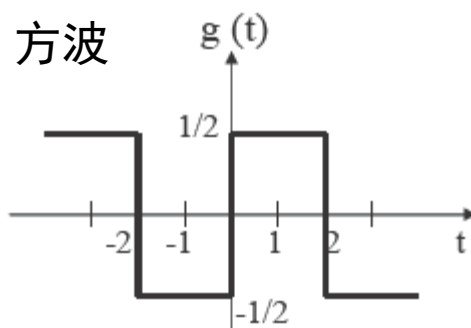
直流分量一定为0，这时积分才满足收敛条件。

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$
$$\int_{-\infty}^t x(t) dt = \int_{-\infty}^t \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right] dt$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^t a_k e^{jk\omega_0 t} \right] dt$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{jk\omega_0} a_k \right] e^{jk\omega_0 t}$$

周期矩形脉冲



$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{2T_1}{T_0} \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_1} = \frac{2T_1}{T_0} \text{Sa}(k\omega_0 T_1)$$



$$a_k = \frac{\sin(\pi k / 2)}{k\pi} \quad a_0 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt = 1/2$$

$$g(t) = x(t-1) - \frac{1}{2}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 d_k b_k C_k

$$d_k = b_k + C_k$$

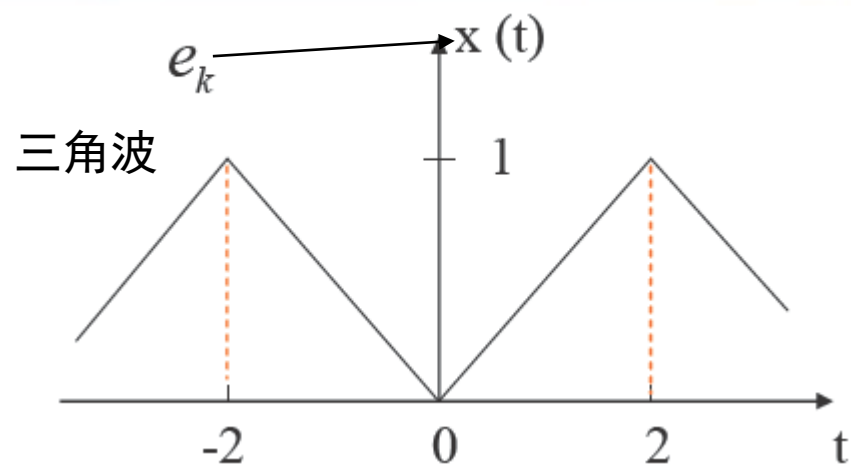
$$g(t) = x(t-1) - \frac{1}{2}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 d_k b_k C_k

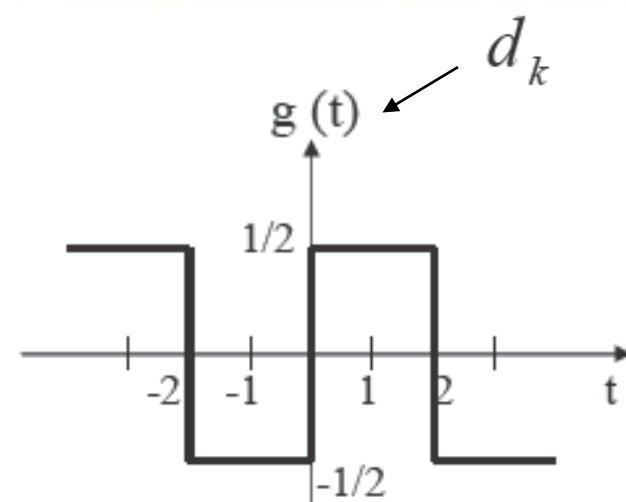
$$d_k = b_k + C_k$$

$$b_k = a_k e^{-jk\pi/2} = a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

$$c_k = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & k = 0 \end{cases} \quad d_k = \begin{cases} \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$



$T=4$



$$\because x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & 0 < t < 2 \\ 0 & t = 0 \\ -\frac{1}{2}t & -2 < t < 0 \end{cases} \longrightarrow x'(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < t < 2 \\ 0 & t = 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 < t < 0 \end{cases}$$

$$e_k = \begin{cases} \frac{d_k}{jk\omega_0}, & \text{for } k \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{for } k = 0 \end{cases}$$

$$d_k = \begin{cases} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2}, & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

$$x'(t) = g(t) \longrightarrow d_k = jk(2\pi/T)e_k = jk(\pi/2)e_k$$

▣ 10、共轭对称性质1

若 $x(t)$ 是以 T 为周期的信号, 且 $x(t) \xleftrightarrow{F} a_k$

则 $x^*(t) \xleftrightarrow{\quad} a_{-k}^*$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_T x^*(t) e^{-jk\omega_0 t} dt &= \frac{1}{T} \int_T [x(t) e^{jk\omega_0 t}]^* dt \\ &= \left[\frac{1}{T} \int_T x(t) e^{jk\omega_0 t} dt \right]^* = a_{-k}^* \end{aligned}$$

▣ 10、共轭对称性质2

对实信号有: $a_k = a_{-k}^* \quad a_k^* = a_{-k}$

当 $a_k = A_k e^{j\theta_k}$ 时有: $A_k = A_{-k} \quad \theta_k = -\theta_{-k}$

当 $a_k = B_k + jC_k$ 时有: $B_k = B_{-k} \quad C_k = -C_{-k}$

▣ 10、共轭对称性质3

由时间反转性质, 可得:

$$x(-t) = x(t) \Rightarrow a_{-k} = a_k \quad x(-t) = -x(t) \Rightarrow a_{-k} = -a_k$$

$$x(t) \text{是实、偶函数} \Rightarrow \begin{cases} a_k^* = a_{-k} \\ a_{-k} = a_k \end{cases} \Rightarrow a_k = a_k^*$$

$$\Rightarrow a_k \text{ 是实、偶函数}$$

由时间反转性质, 可得:

$$x(-t) = x(t) \Rightarrow a_{-k} = a_k \quad x(-t) = -x(t) \Rightarrow a_{-k} = -a_k$$

$$x(t) \text{ 是实、奇函数} \Rightarrow \begin{cases} a_k^* = a_{-k} \\ a_{-k} = -a_k \end{cases} \Rightarrow -a_k = a_k^*$$

$$\Rightarrow a_k \text{ 是虚、奇函数}$$

▣ 10、共轭对称性质4

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{1}{2}[a_k + a_{-k}] \Rightarrow b_k = \frac{1}{2}[a_k + a_k^*] = \text{Re}\{a_k\}$$

对实信号有: $a_k = a_{-k}^* \quad a_k^* = a_{-k}$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \Rightarrow b_k = \frac{1}{2}[a_k - a_k^*] = j \text{Im}\{a_k\}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{Fs} a_k$$

$$x(-t) \xleftrightarrow{Fs} a_{-k}$$

11、Parseval 定理

信号在一个周期内的平均功率

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

$$\frac{1}{T} \int_T |a_k e^{jk\omega_0 t}|^2 dt = \frac{1}{T} \int_T |a_k|^2 dt = |a_k|^2$$

一个周期信号的总平均功率，等于它各次谐波的平均功率之和。

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt &= \frac{1}{T} \int_T x(t) x(t)^* dt \\ &= \frac{1}{T} \int_T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right\} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^* e^{-jm\omega_0 t} \right\} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \end{aligned}$$

$x(t) = 4 + 6\cos(\omega_0 t) + 4\cos(2\omega_0 t)$ 计算信号的功率。

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

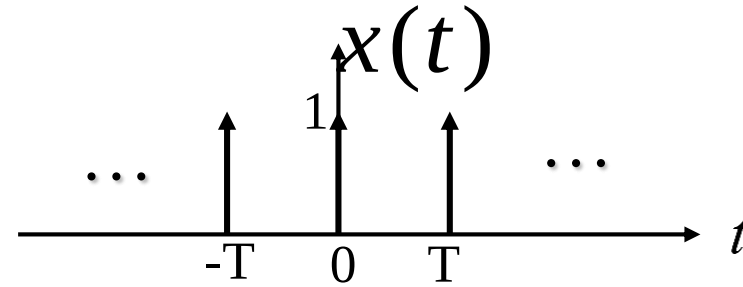
A. 42 B. 45

$$x(t) = 2e^{-j2\omega_0 t} + 3e^{-j\omega_0 t} + 4 + 3e^{j\omega_0 t} + 2e^{j2\omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 4 \\ a_{\pm 1} = 3 \\ a_{\pm 2} = 2 \end{cases}$$

$$P = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 = 42$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = 42$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$\therefore x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

周期性矩形脉冲将其微分后，可利用前面表示为

$$g'(t) = x(t + T_1) - x(t - T_1)$$

设 $g(t) \xleftrightarrow{F} c_k$ $g'(t) \xleftrightarrow{F} b_k$ 由时域微分性质有

$$b_k = jk\omega_0 c_k$$

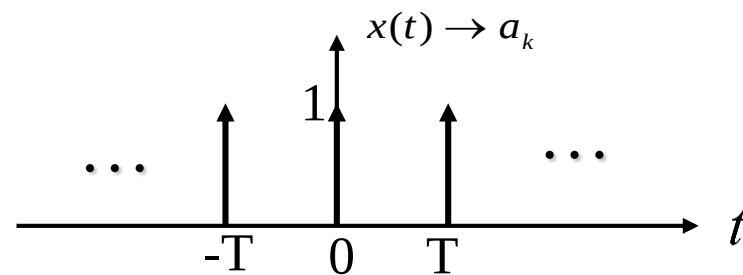
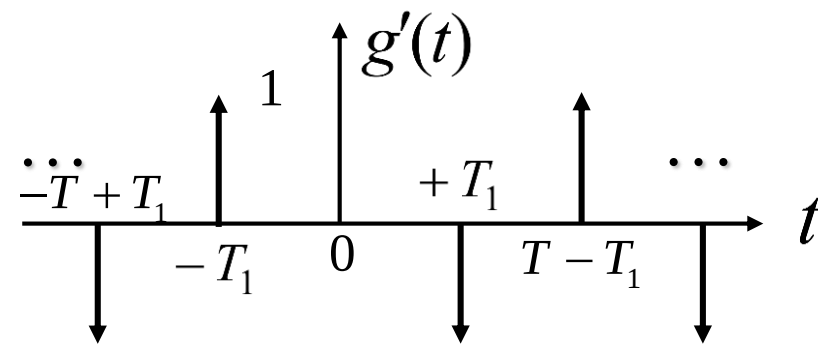
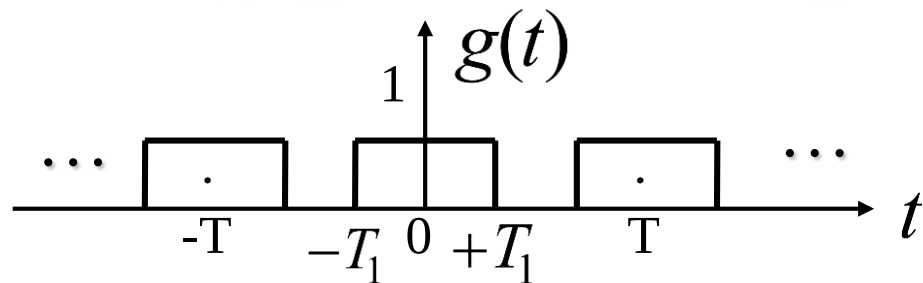
$$b_k = a_k \left[e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1} \right] = 2ja_k \sin k\omega_0 T_1$$

由前知

$$a_k = 1/T$$

$$\omega_0 = 2\pi/T$$

$$\therefore c_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T} = \frac{2T_1}{T} \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_1}$$



□ 连续时间的系统频率响应

对连续时间系统 $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$

$H(s)$ 被称为系统的系统函数。

如果 $s = j\omega$ 则 $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$

$H(j\omega)$ 被称为连续时间LTI系统的频率响应

□LTI系统输出

如果一个LTI系统输入周期性信号 $x(t)$ 或 $x[n]$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

则
$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

* 可见，LTI系统对周期信号的响应仍是一个周期信号，LTI系统的作用是对各个谐波频率的信号分量进行不同的加权处理。

例3.16 假设 $x(t) = \sum_{k=-3}^3 a_k e^{jk2\pi t}$,

$$a_0 = 1, a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}, a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

LTI系统的单位冲激响应为 $h(t) = e^{-t}u(t)$

求 输出 $y(t)$ 的傅里叶级数系数。

首先求频率响应

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad H(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = -\frac{1}{1+j\omega} e^{-\tau(1+j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+j\omega}$$

由 $x(t)$ 表达式可知, $\omega_0 = 2\pi$, 因此可得

$$y(t) = \sum_{k=-3}^3 b_k e^{jk2\pi t} \quad \text{由于 } b_k = a_k H(jk2\pi) \text{ , 所以 } b_0 = a_0 H(j02\pi) = 1$$

$$b_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+j2\pi} \right) \quad b_{-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-j2\pi} \right) \quad b_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+j4\pi} \right)$$

$$b_{-2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-j4\pi} \right) \quad b_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+j6\pi} \right) \quad b_{-3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-j6\pi} \right)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$

当s和z为一般复数时

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \quad \text{——称系统函数}$$

当 $s = j\omega$, $z = e^{j\omega}$ 时,

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega n} \quad \text{——称系统频率响应}$$

✓ 一个周期信号经过LTI系统，输出是否为周期？周期如何？

✓ LTI系统会不会改变信号的频率成分？

滤波--改变一个信号中各频率分量的相对大小，或全部消除某些频率分量的过程。

频率**成形**滤波器—用于改变频谱形状的线性时不变系统。

频率**选择**滤波器—显著地衰减或消除掉某些频率成份的线性时不变系统。

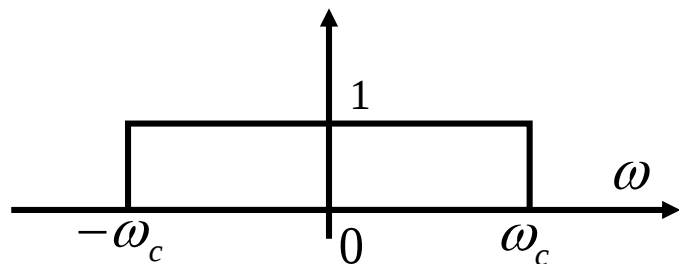
□理想频率选择性滤波器的频率特性

理想频率选择性滤波器的频率特性在某一个（或几个）频段内，频率响应为常数，而在其它频段内频率响应等于零。

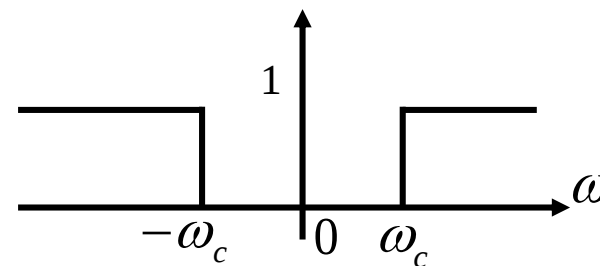
理想滤波器可分为低通、高通、带通、带阻。

滤波器允许信号完全通过的频段称为滤波器的通带（pass band），完全不允许信号通过的频段称为阻带（stop band）。

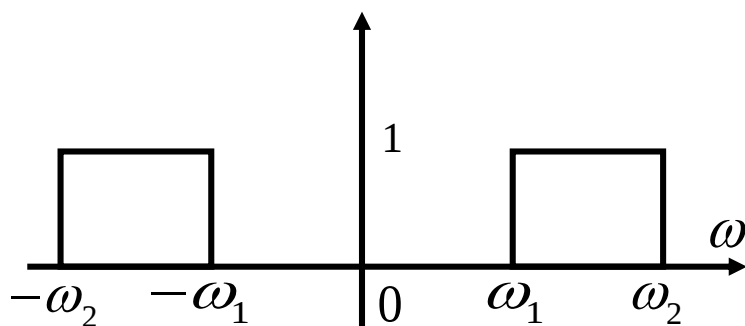
连续时间理想频率选择性滤波器的频率特性



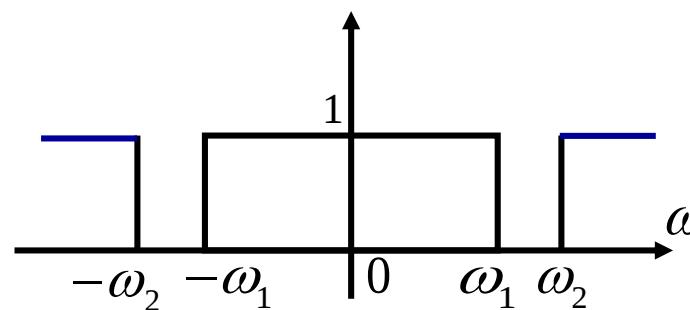
低通



高通

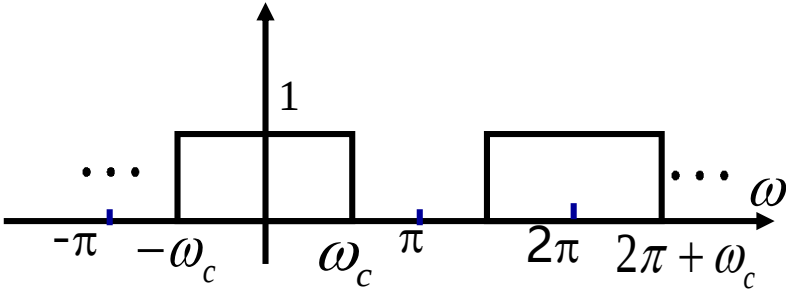


带通

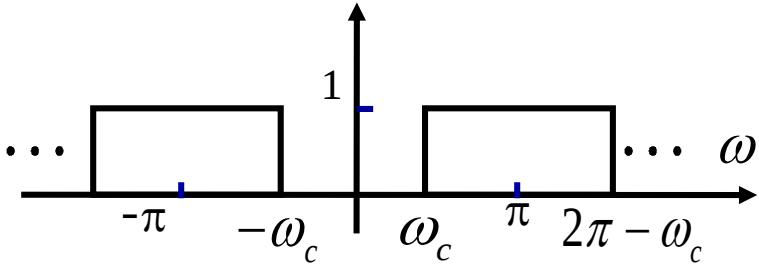


带阻

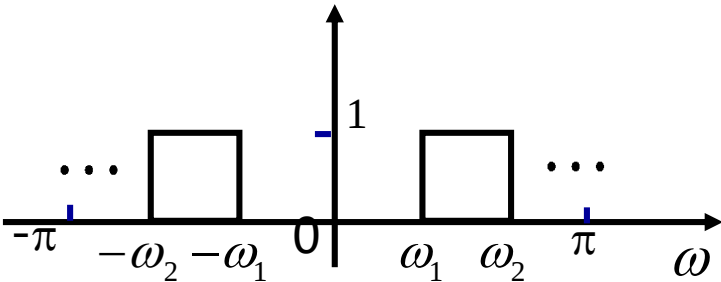
离散时间理想频率选择性滤波器的频率特性



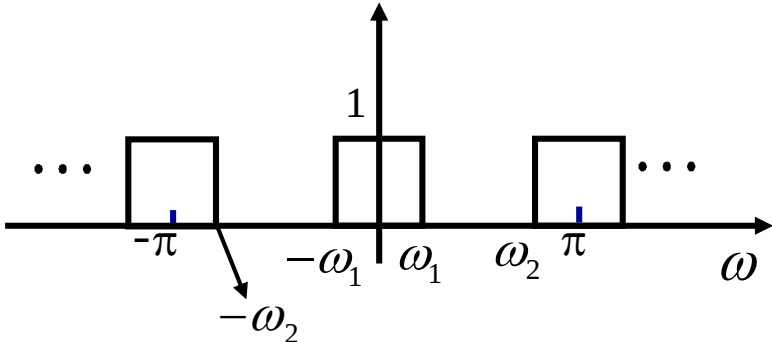
低通



高通



带通



带阻

3.10

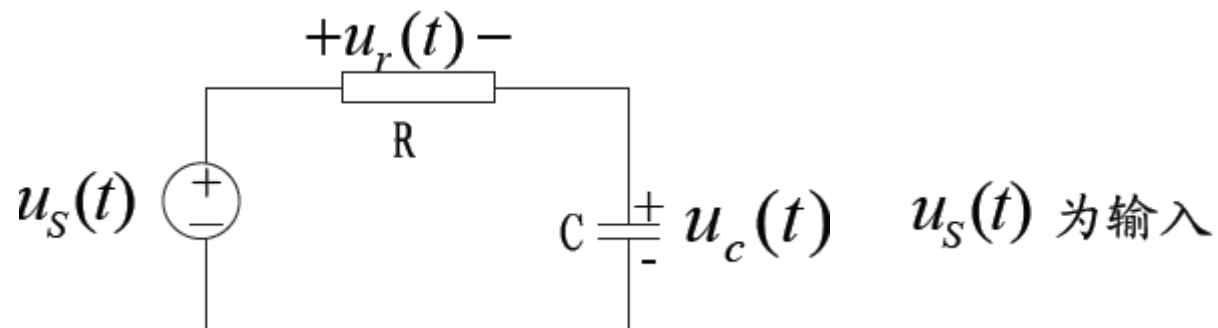
用微分方程所描述的连续时间滤波器

1、当取 $u_c(t)$ 作输出时

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_s(t)$$

$$u_s(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow u_c(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$$\begin{aligned} & RC \frac{d}{dt} [H(j\omega)e^{j\omega t}] + H(j\omega)e^{j\omega t} \\ &= RCj\omega H(j\omega)e^{j\omega t} + H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \end{aligned}$$



$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega}$$

A. 低通 B. 高通