

第2章 线性时不变系统

建立系统的数学模型 { 输入—输出描述法
状态变量描述法

求解系统响应 { 经典法: $\rightarrow$ 定初始条件 { 满足 $y(0_+) = y(0_-)$
起始点有跳变: 求跳变量
双零法 { 零输入响应: 用经典法求解
零状态响应: 卷积积分法求解
卷积积分法: 求零状态响应

□ LTI线性时不变系统的特点

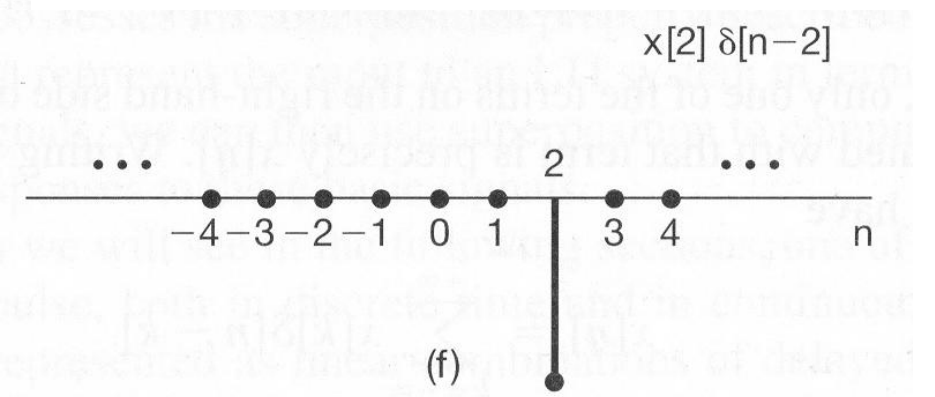
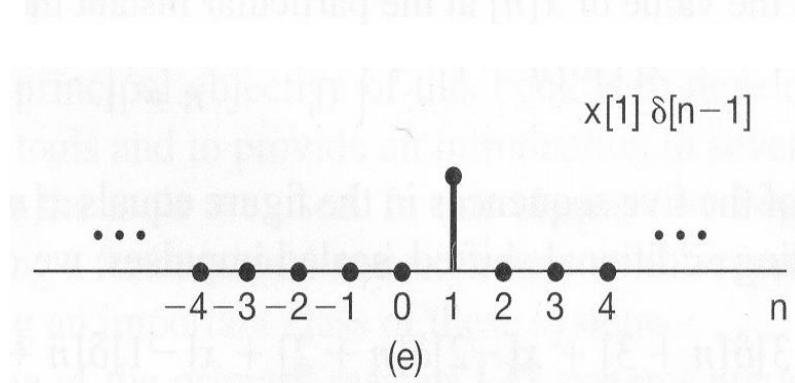
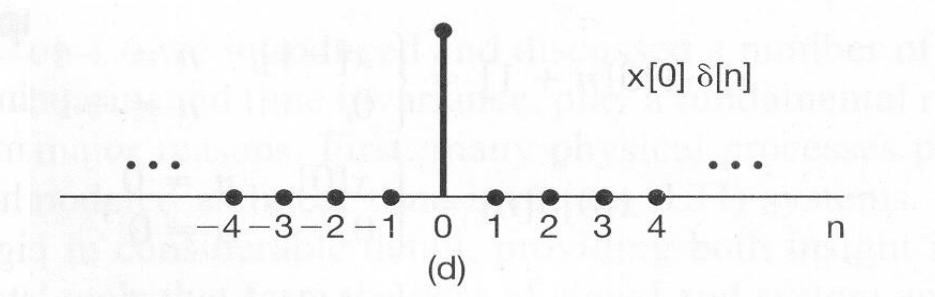
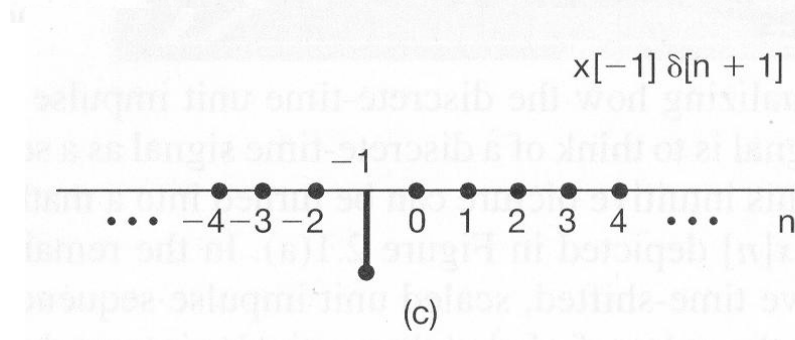
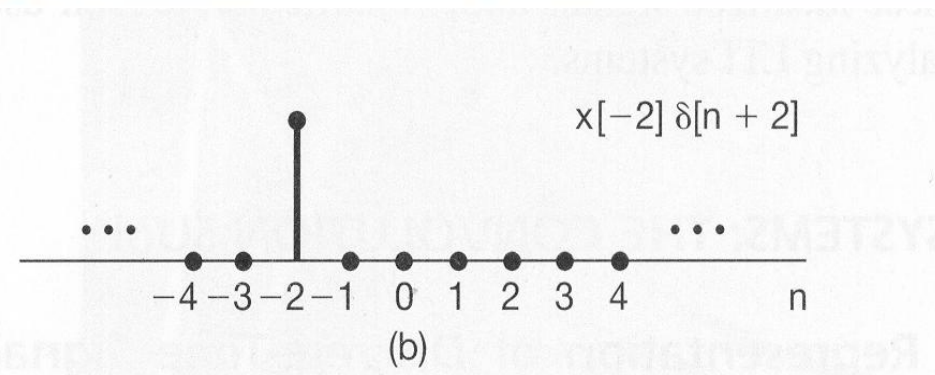
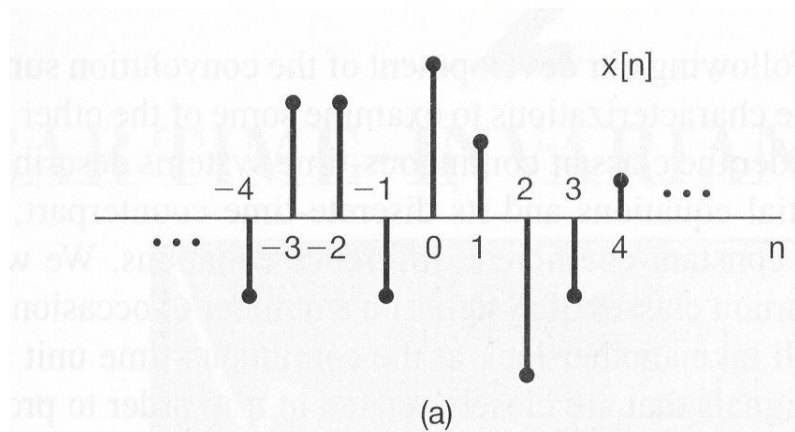
$$\begin{array}{ccc} x(t) = \sum_i a_i x_i(t) & & x_i(t) \rightarrow y_i(t) \\ \downarrow & & \\ \text{则 } y(t) = \sum_i a_i y_i(t) & & \end{array}$$

只需要知道LTI系统对基本信号的响应，就可以得到输出信号

□ LTI线性时不变系统

问题的实质:

1. 研究信号的分解: 即以什么样的信号作为构成任意信号的基本信号单元, 如何用基本信号单元的线性组合来构成任意信号;
2. 如何得到LTI系统对基本单元信号的响应。



2.1 离散时间LTI系统：卷积和

□ 2.1.1 用脉冲表示的离散时间信号

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

表明：任何信号 $x[n]$ 都可以被分解成移位加权的单位脉冲信号的线性组合。

□ 2.1.2 离散时间系统的单位脉冲响应和卷积和表示

$$\delta[n] \longrightarrow \text{线性时不变系统} \longrightarrow h[n] \text{ 单位脉冲响应}$$

$$\delta[n-k] \longrightarrow \text{线性时不变系统} \xrightarrow{\text{时不变性}} h[n-k]$$

$$x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \text{线性时不变系统} \xrightarrow{\text{齐次性}} x[k]h[n-k]$$

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \text{线性时不变系统} \xrightarrow{\text{叠加性}} y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \\ &= x[n] * \delta[n] & & = x[n] * h[n] \end{aligned}$$

一个离散时间LTI系统的特性可以用它的单位脉冲响应来表征

□ 卷积和计算方法

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

k 范围由 $x[n]$, $h[n]$ 范围共同决定。

离散卷积过程：序列倒置（翻转）→移位→相乘→求和

1. 解析式法

2. 图解法

3. 对位相乘求和法求卷积

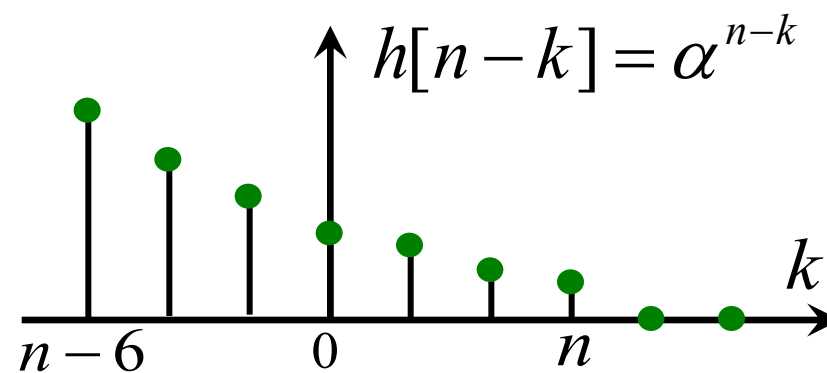
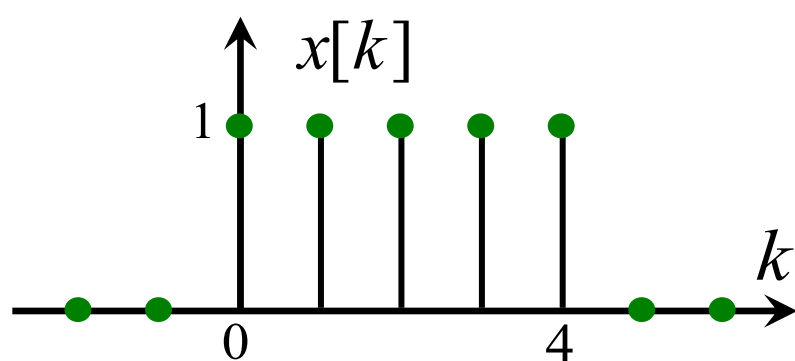
4. 利用性质

□ 图解法

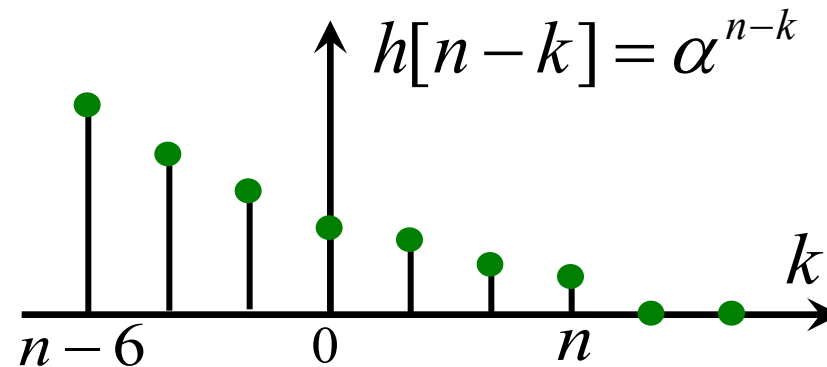
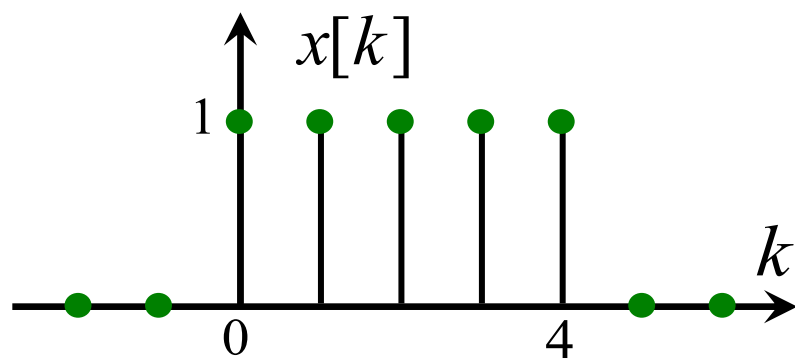
通过图形帮助确定反转移位信号的区间表示，对于确定卷积和计算的区段及各区段求和的上下限是很有用的。

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{others} \end{cases} \quad h[n] = \begin{cases} \alpha^n & \alpha > 1, 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

□ 图解法



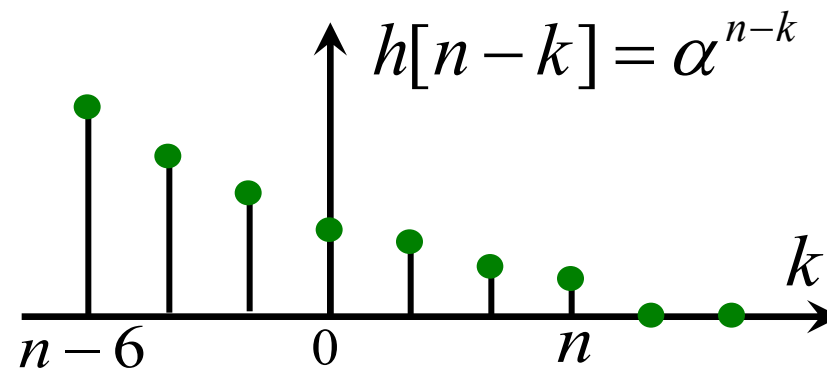
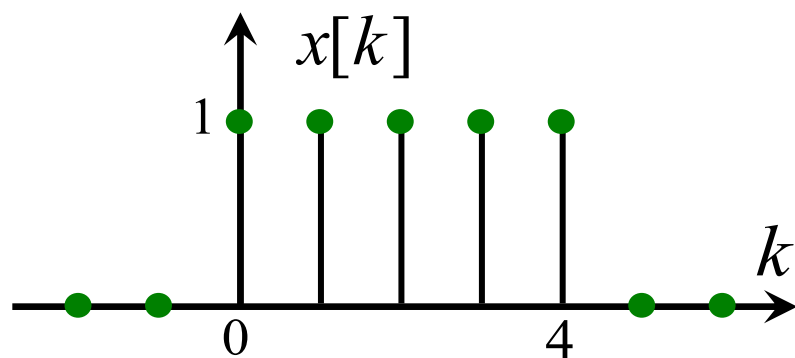
① $n < 0$ 时, $y[n] = 0$



② $0 \leq n \leq 4$ 时,

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^n \alpha^{-k}$$

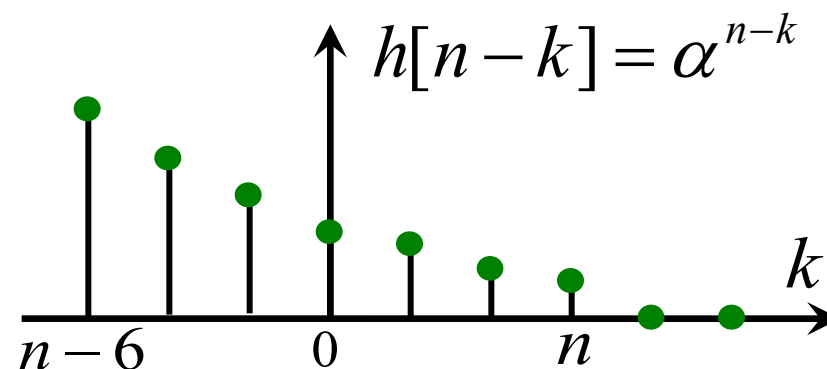
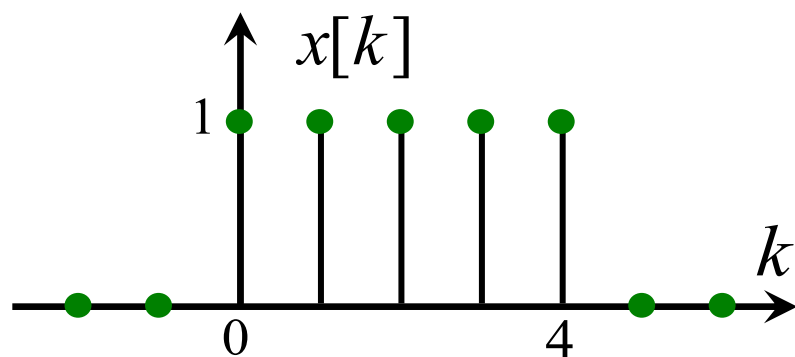
$$= \alpha^n \frac{1 - \alpha^{-(n+1)}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$



③ $4 \leq n \leq 6$ 时,

$$y[n] = \sum_{k=0}^4 \alpha^{n-k}$$

$$= \alpha^n \frac{1 - \alpha^{-5}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

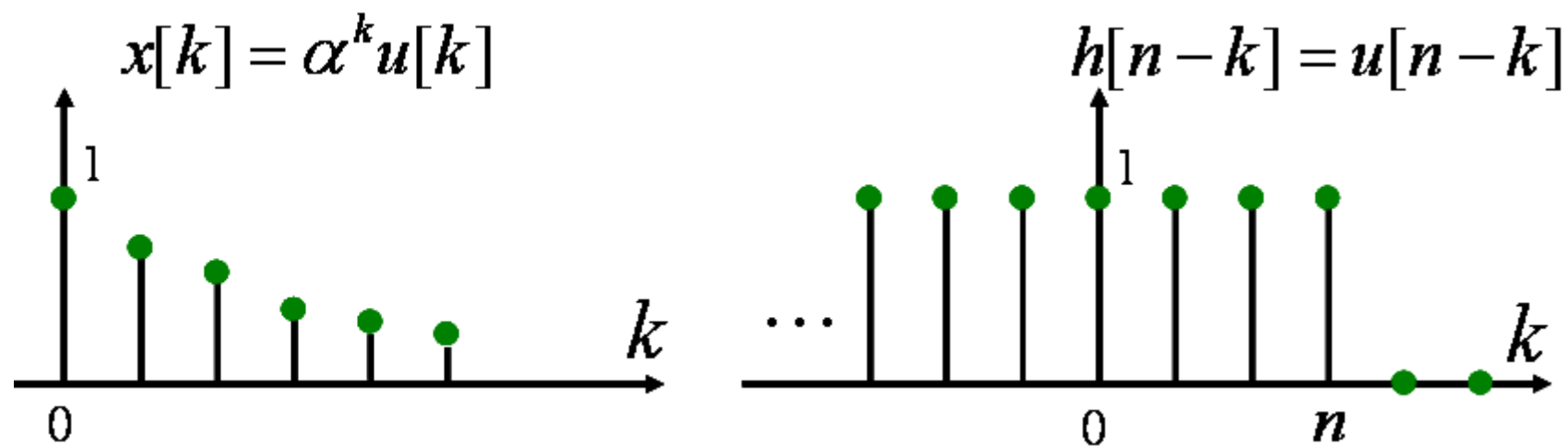


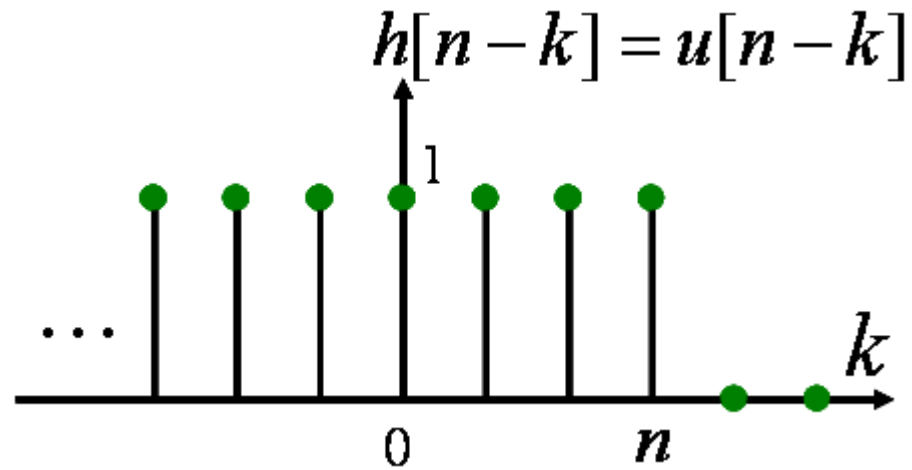
④ $6 \leq n \leq 10$ 时,
$$y[n] = \sum_{k=n-6}^4 \alpha^{n-k} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}$$

⑤ $n > 10$ 时,
$$y[n] = 0$$

□ 解析式法

例1 $x[n] = \alpha^n u[n] \quad 0 < \alpha < 1 \quad h[n] = u[n]$





$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k]u[n-k]$$

$$= \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} u[n]$$

□ 对位相乘求和法

$$\text{已知 } x_1[n] = \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{4}, 3, 2, 1 \right\}, \quad x_2[n] = \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{3}, 2, 1 \right\},$$

$$\text{求: } y[n] = x_1[n] * x_2[n]$$

使用对位相乘求和法求卷积

步骤:

两序列右对齐→

逐个样值对应相乘但不进位→

同列乘积值相加（注意 $n=0$ 的点）

$$\begin{array}{rcccc}
 x_1[n] & : & 4 & 3 & 2 & 1 \\
 & & \uparrow & & & \\
 & & n=0 & & & \\
 \times \quad x_2[n] & : & & 3 & 2 & 1 \\
 & & & \uparrow & & \\
 & & & n=0 & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc}
 & & 4 & 3 & 2 & 1 \\
 & 8 & 6 & 4 & 2 & \\
 + & 12 & 9 & 6 & 3 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc}
 y[n] & : & 12 & 17 & 16 & 10 & 4 & 1 \\
 & & \uparrow & & & & & \\
 & & n=0 & & & & &
 \end{array}$$

$$\text{所以 } y[n] = \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{12}, 17, 16, 10, 4, 1 \right\}$$

□ 利用性质

$$\text{已知 } x[n] = R_3[n], h[n] = \begin{Bmatrix} 1 \\ \uparrow \\ n=0 \end{Bmatrix}, 2, 3 \text{, 求 } x[n] * h[n].$$

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

利用性质:

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

$$x[n] * h[n]$$

$$= \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

$$+ \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3]$$

$$+ \delta[n-2] + 2\delta[n-3] + 3\delta[n-4]$$

$$= \delta[n] + 3\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 5\delta[n-3] + 3\delta[n-4]$$

输出序列 $y(n)$ 的横坐标范围

$$x[n] \quad n_A$$

$$h[n] \quad n_B$$

$$y[n] \quad n_C = n_A + n_B - 1$$

若：

$$x[n] \text{ 序列} \quad n_1 \leq n \leq n_2,$$

$$h[n] \text{ 序列} \quad n_3 \leq n \leq n_4$$

$$\text{则 } y[n] \text{ 序列} \quad (n_1 + n_3) \leq n \leq (n_2 + n_4)$$

例如：

$$x[n]: \quad 0 \leq n \leq 3 \quad \text{4个元素}$$

$$h[n]: \quad 0 \leq n \leq 4 \quad \text{5个元素}$$

$$y[n]: \quad 0 \leq n \leq 7 \quad \text{8个元素}$$

已知 $f(n) = u(n) - u(n-100)$, $x(n) = f(n) * f(n)$, 写出 $x(n)$ 的卷积式, 并求 $x(100)$ 。

A.100

B.99

$$\begin{aligned} x(n) &= f(n) * f(n) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [u(m) - u(m-100)][u(n-m) - u(n-m-100)] \\ x(100) &= 99 \end{aligned}$$

2.2

连续时间LTI系统：卷积积分

□ 用冲激表示的连续时间信号

- ✓ 离散时间情况下，导出卷积和的关键是离散时间单位脉冲的筛选性质
- ✓ 连续时间情况下，可以用阶梯信号或冲激信号来表示连续信号

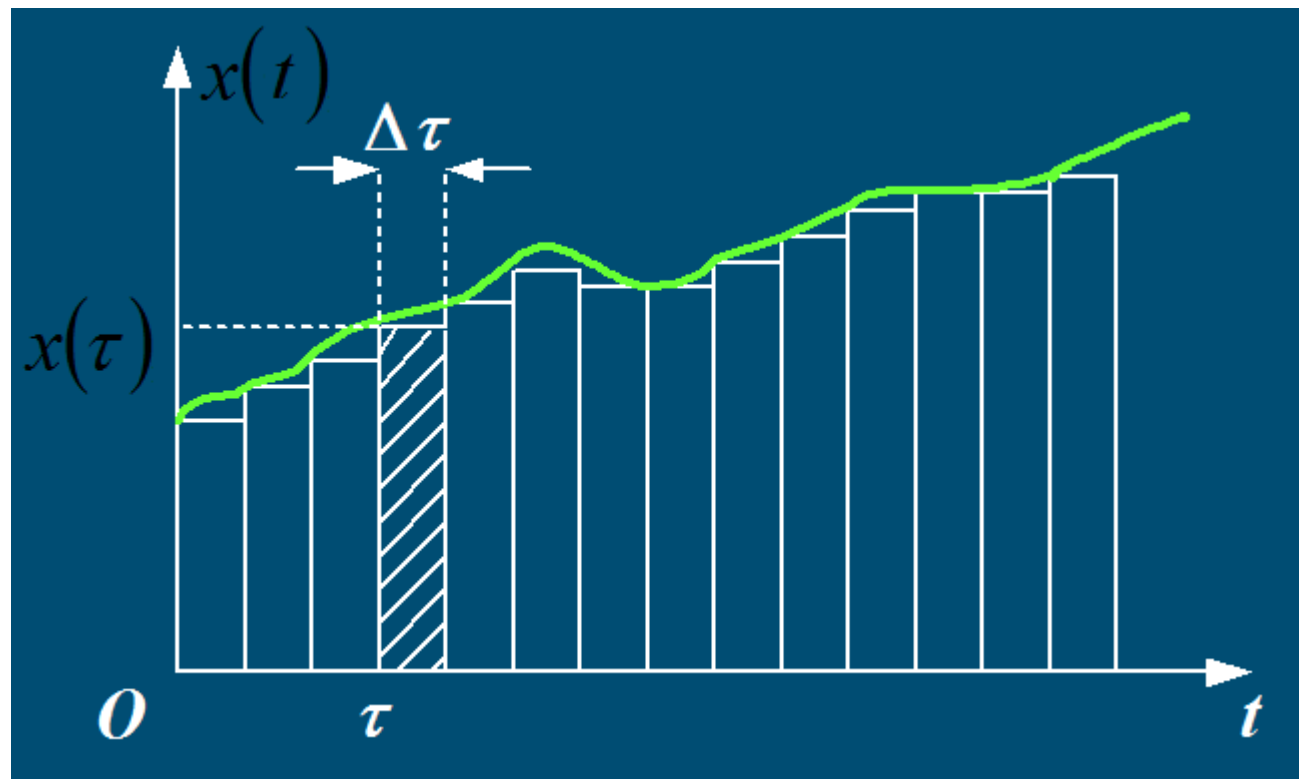
□ 2.2.1 用冲激表示的连续时间信号

当 $t = \tau$, 脉高: $x(\tau)$, 脉宽: $\Delta\tau$,

存在区间: $u(t - \tau) - u(t - \tau - \Delta\tau)$

此窄脉冲可表示为:

$$x(\tau)[u(t - \tau) - u(t - \tau - \Delta\tau)]$$



从 $\tau = -\infty$ 到 ∞ , $x(t)$ 可表示为许多窄脉冲的叠加

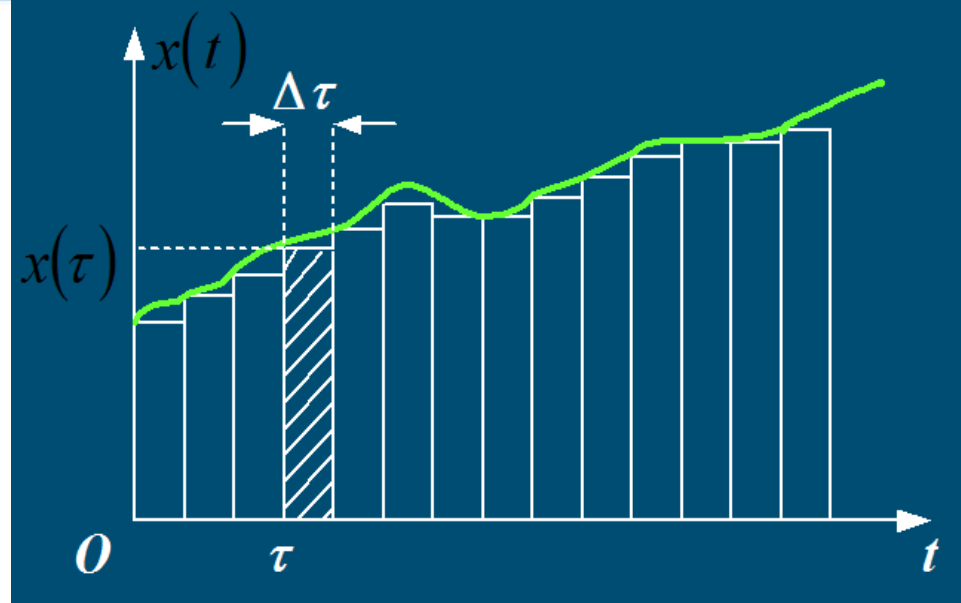
$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) [u(t-\tau) - u(t-\tau-\Delta\tau)] \\ &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{[u(t-\tau) - u(t-\tau-\Delta\tau)]}{\Delta\tau} \cdot \Delta\tau \end{aligned}$$

令 $\Delta\tau \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{[u(t-\tau) - u(t-\tau-\Delta\tau)]}{\Delta\tau} = \frac{du(t-\tau)}{dt} = \delta(t-\tau)$$

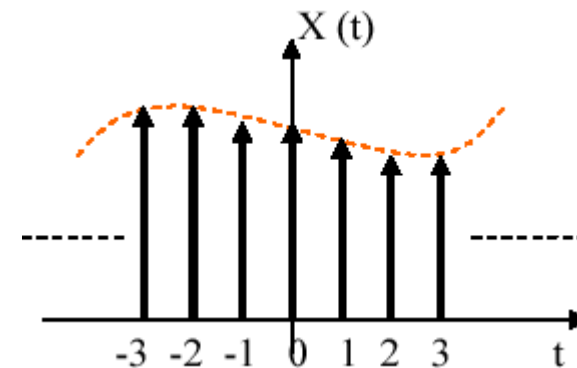
$$\Delta\tau \rightarrow d\tau, \quad \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{\tau=-\infty}^{\infty}$$

$$\text{所以 } x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$



出现在不同时刻的
不同强度的冲激函
数的和。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$



表明：任何连续时间信号 $x(t)$ 都可以被分解成移位加权的单位冲激信号的线性组合。

这就是连续时间冲激函数的筛选性质

□ 2.2.2 连续时间LTI系统的单位冲激响应和卷积积分表示

$$\delta(t) \longrightarrow \text{线性时不变系统} \longrightarrow h(t) \quad \text{单位冲激响应}$$

$$\delta(t - \tau) \longrightarrow \text{线性时不变系统} \longrightarrow h(t - \tau)$$

$$x(\tau)\delta(t - \tau) \longrightarrow \text{线性时不变系统} \longrightarrow x(\tau)h(t - \tau)$$

$$\begin{aligned} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau &\longrightarrow \text{线性时不变系统} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= x(t) * \delta(t) && = x(t) * h(t) \end{aligned}$$

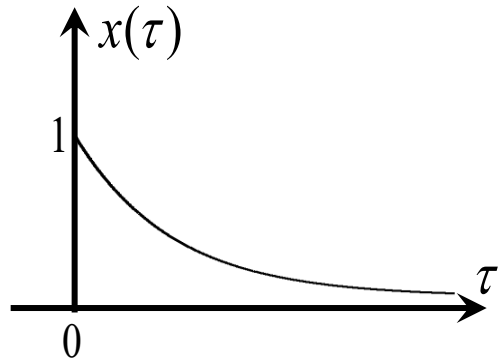
一个连续时间LTI系统的特性可以用它的单位冲激响应来表征

□ 卷积积分的计算

运算过程的实质也是：参与卷积的两个信号中，一个不动，另一个反转后平移 t ，求得 $h(t-\tau)$ 和 $x(\tau)$ 对应相乘，再计算相乘后曲线所包围的面积。

通过图形帮助确定积分区间和积分上下限是很有用的。

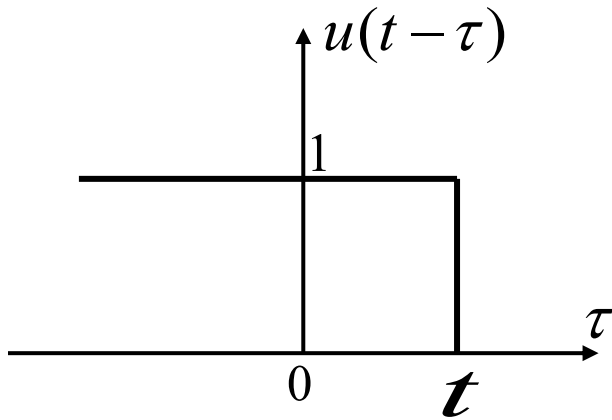
例1: $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$ $h(t) = u(t)$



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)$$

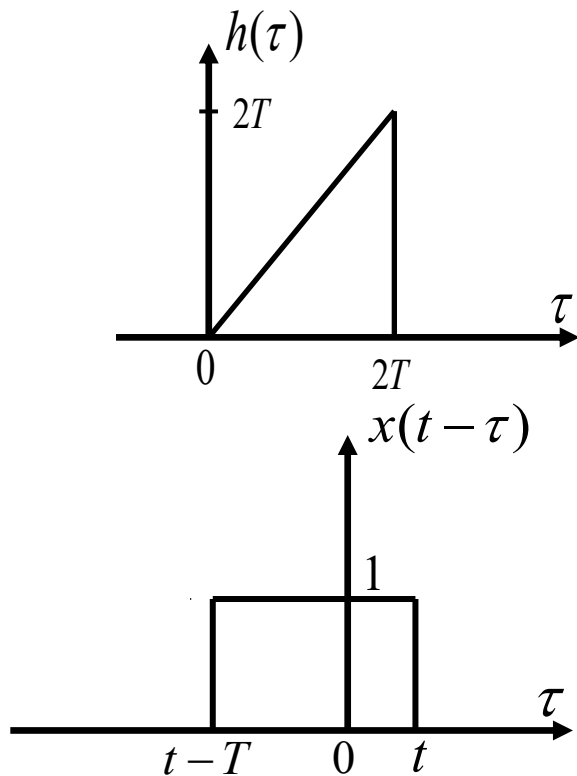
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau}u(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-a\tau}d\tau u(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$$

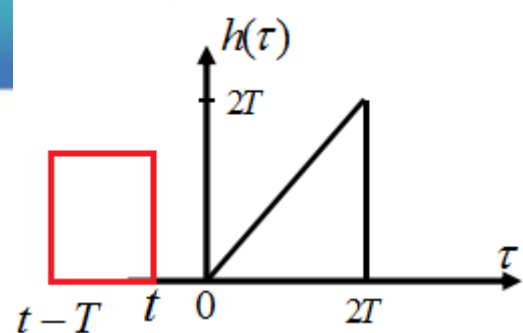


例2：

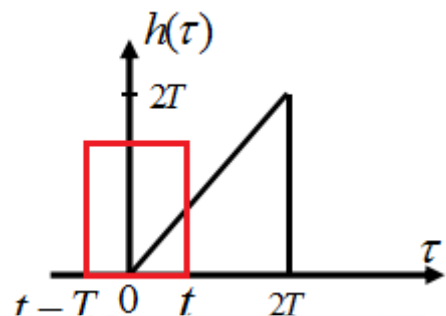
$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 2T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



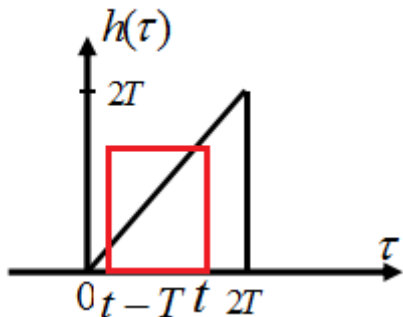
$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau \end{aligned}$$



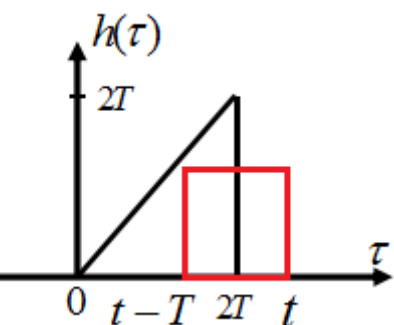
① 当 $t < 0$ 时, $y(t) = 0$



② 当 $0 < t < T$ 时, $y(t) = \int_0^t \tau d\tau = \frac{1}{2}t^2$

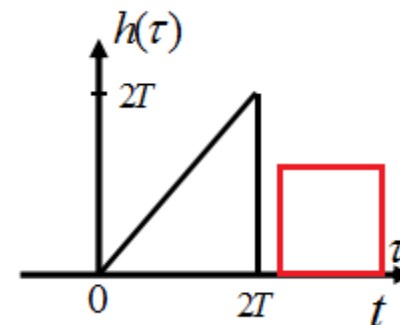


③ 当 $T < t < 2T$ 时, $y(t) = \int_{t-T}^t \tau d\tau = Tt - \frac{1}{2}T^2$

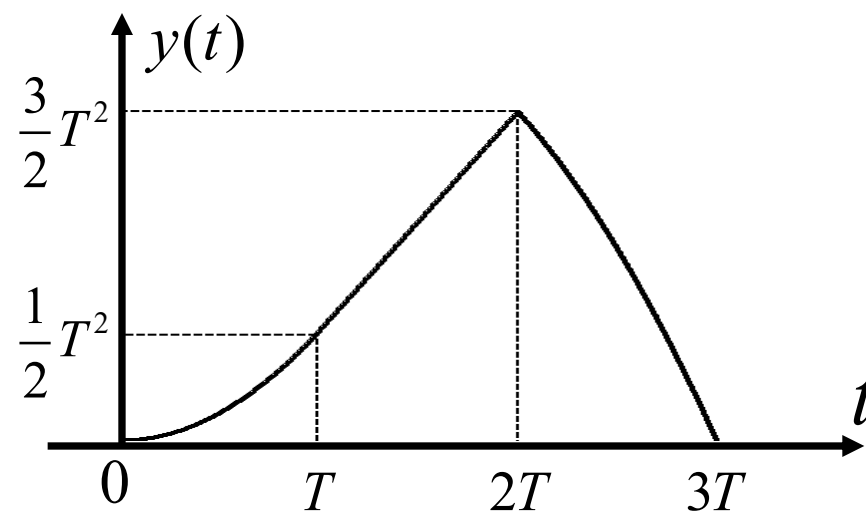
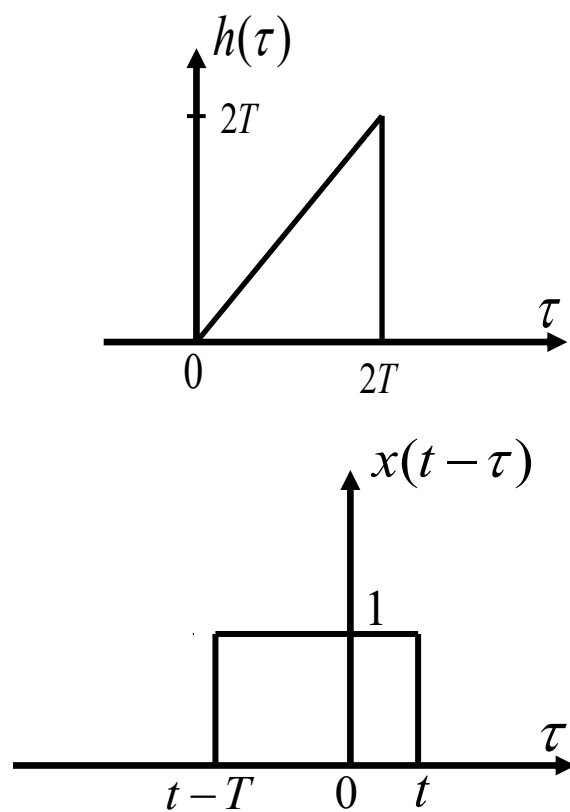


④ 当 $2T < t < 3T$ 时, $y(t) = \int_{t-2T}^{2T} \tau d\tau = 2T^2 - \frac{1}{2}(t-T)^2$

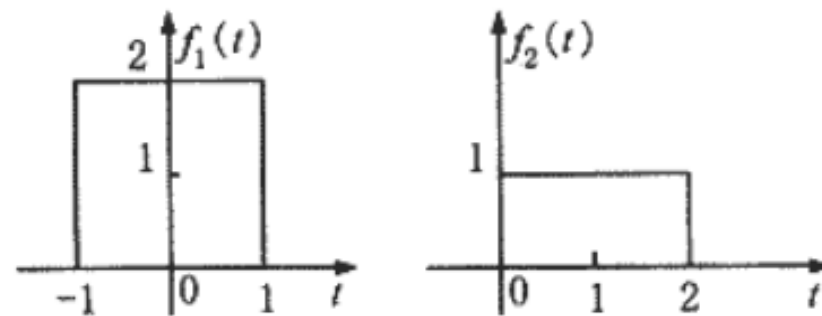
⑤ 当 $t > 3T$ 时, $y(t) = 0$



例2：



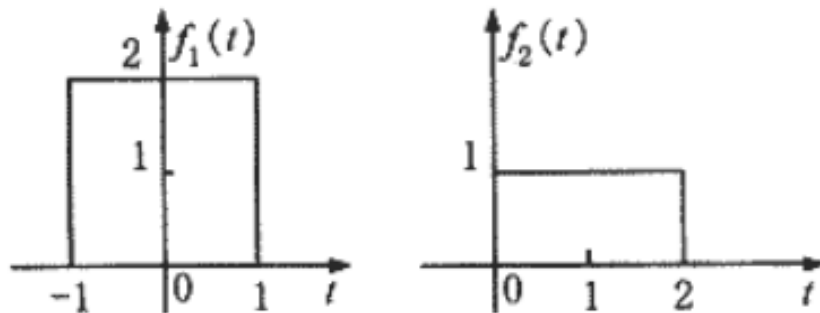
信号 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 波形如图所示, 设 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$, 则 $f(0)$ 为



A.1

B.2

信号 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 波形如图所示, 设 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$, 则 $f(0)$ 为



A. 1

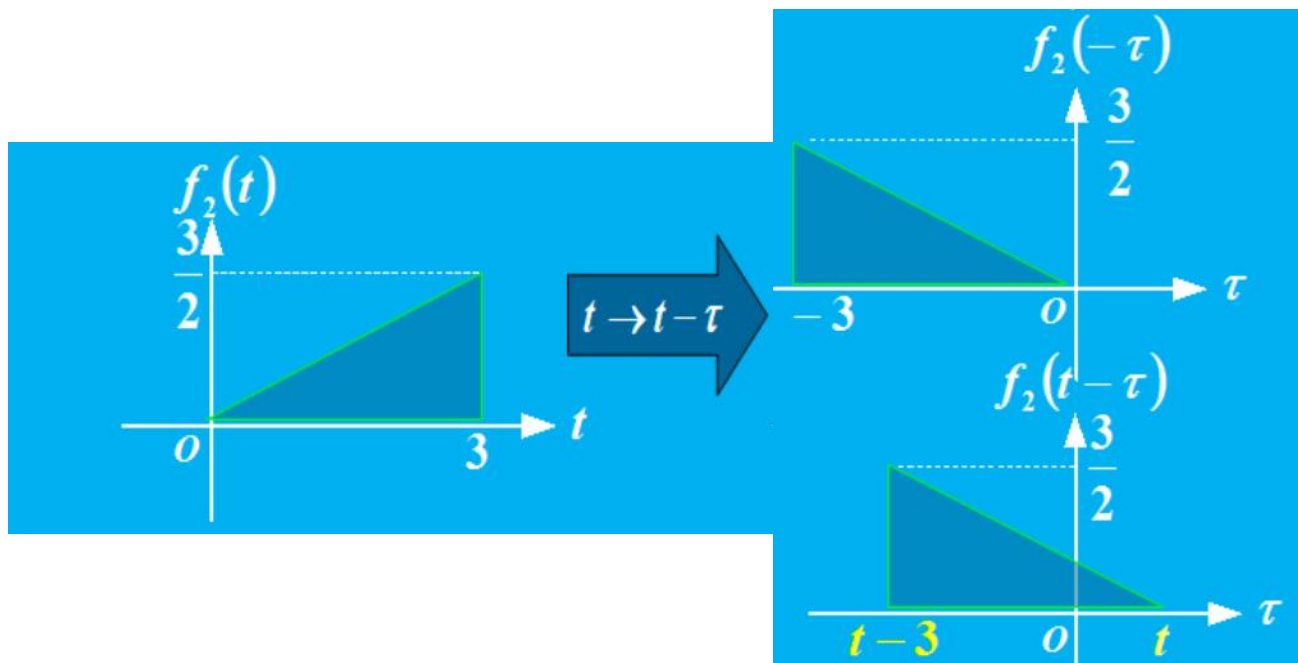
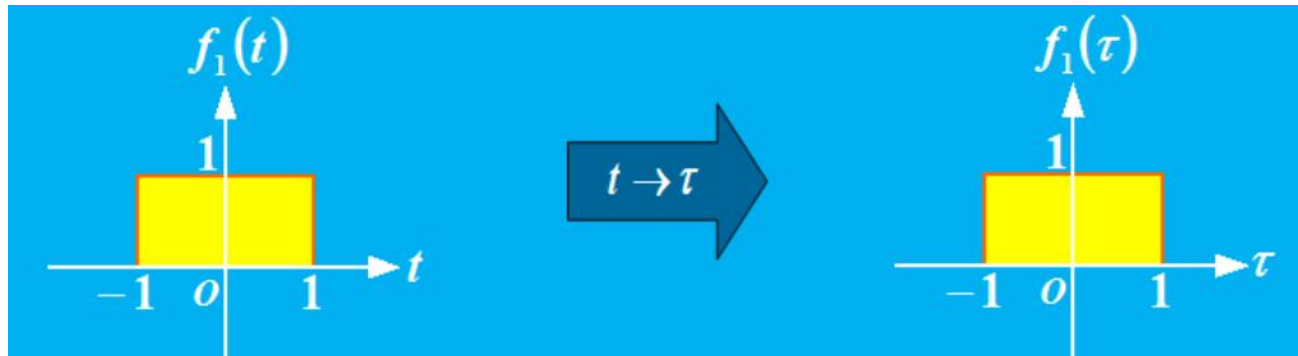
B. 2

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

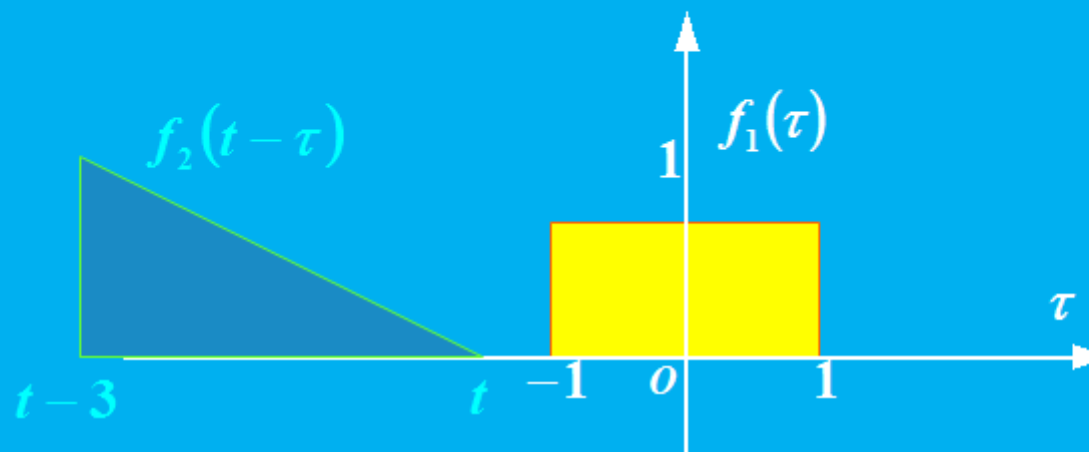
$$f(0) = \int_{-1}^0 f_1(\tau) f_2(-\tau) d\tau = 2$$

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases} \quad f_2(t) = \frac{t}{2} \quad (0 \leq t \leq 3)$$

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t)$$



$$t \leq -1$$



$$t \leq -1$$

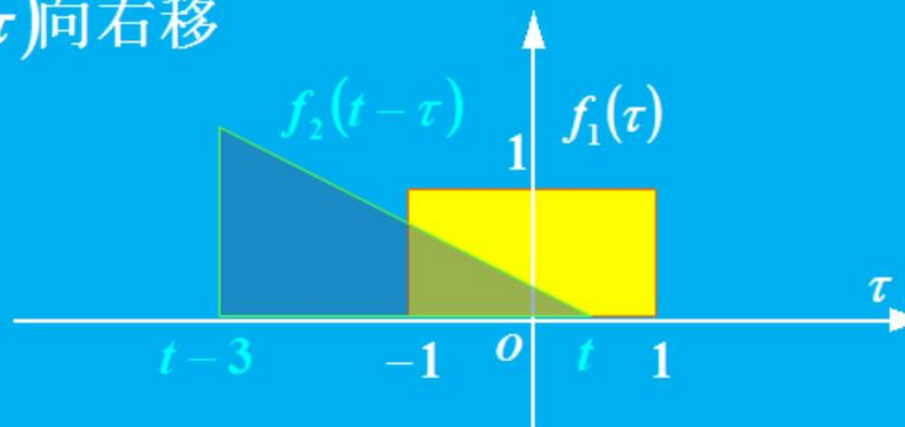
两波形没有公共处，二者乘积为0，即积分为0

$$f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) = 0$$

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = 0$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

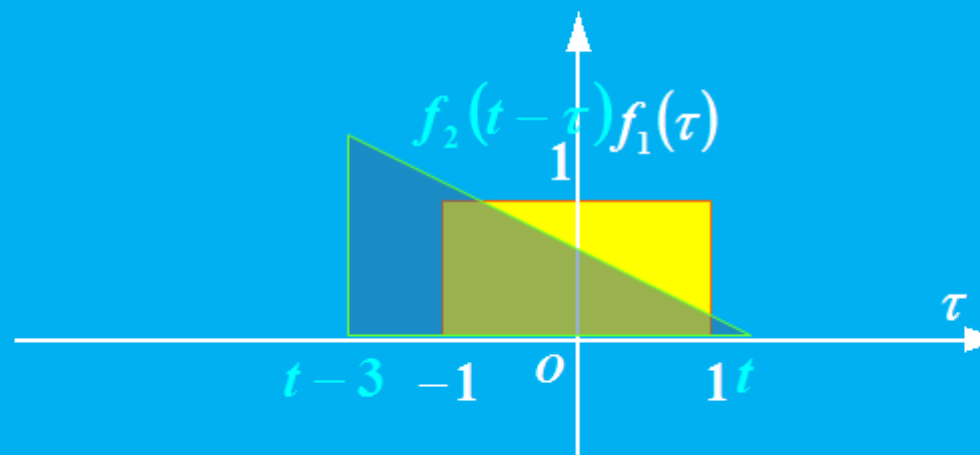
$f_2(t-\tau)$ 向右移



$t > -1$ 时两波形有公共部分，积分开始不为0，
积分下限-1，上限 t ， t 为移动时间；

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-1}^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-1}^t 1 \times \frac{(t-\tau)}{2} d\tau \\ &= \left(\frac{t\tau}{2} - \frac{\tau^2}{4} \right) \bigg|_{-1}^t = \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

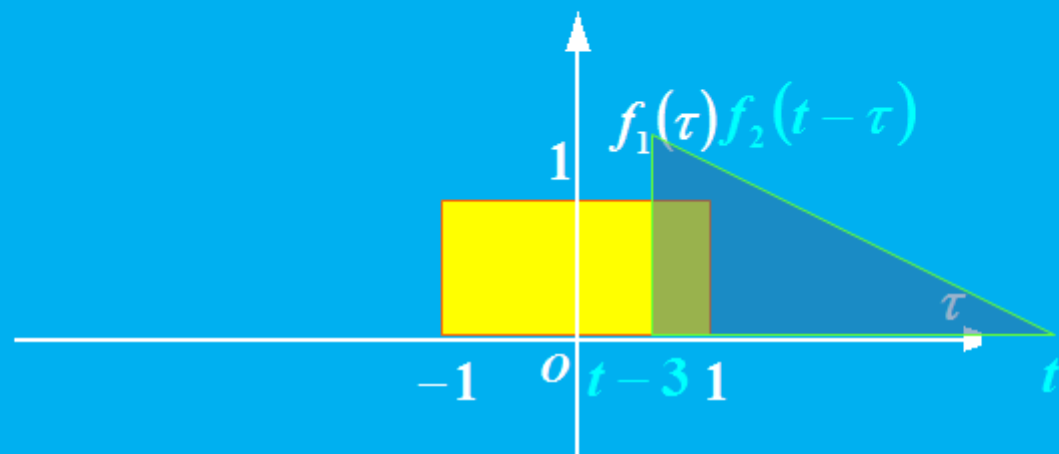
$$1 \leq t \leq 2$$



$$\begin{cases} t-3 \leq -1 \\ t \geq 1 \end{cases} \quad \text{即 } 1 \leq t \leq 2$$

$$g(t) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(t-\tau) d\tau = t$$

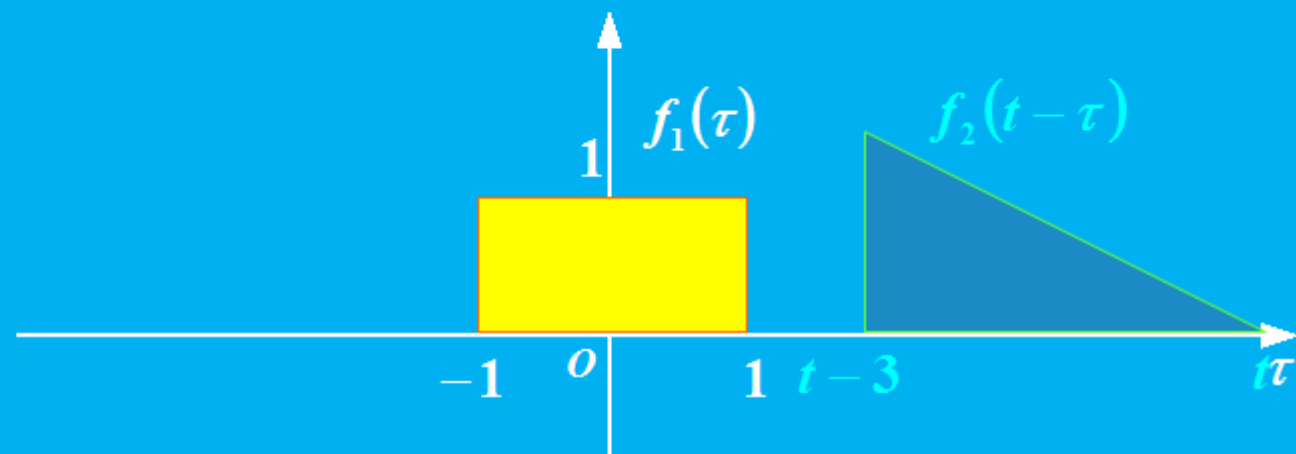
$$2 \leq t \leq 4$$



$$\begin{cases} t-3 \geq -1 \\ t-3 \leq 1 \end{cases} \quad \text{即 } 2 \leq t \leq 4$$

$$g(t) = \int_{t-3}^1 \frac{1}{2}(t-\tau) d\tau = -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + 2$$

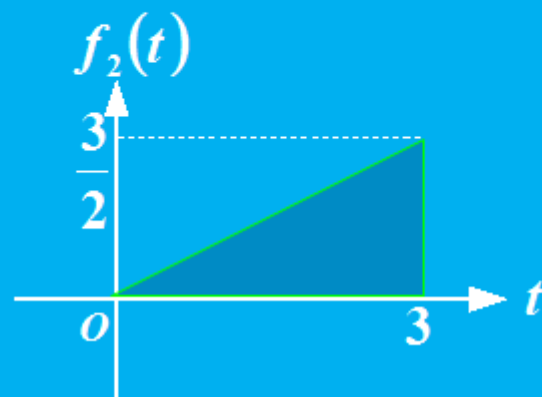
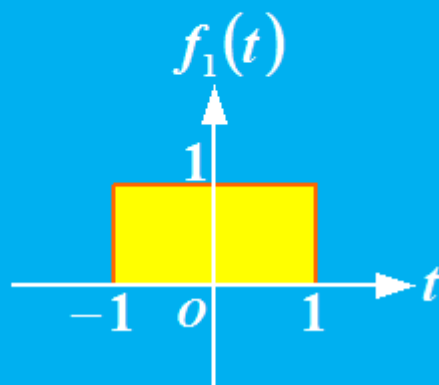
$$t \geq 4$$



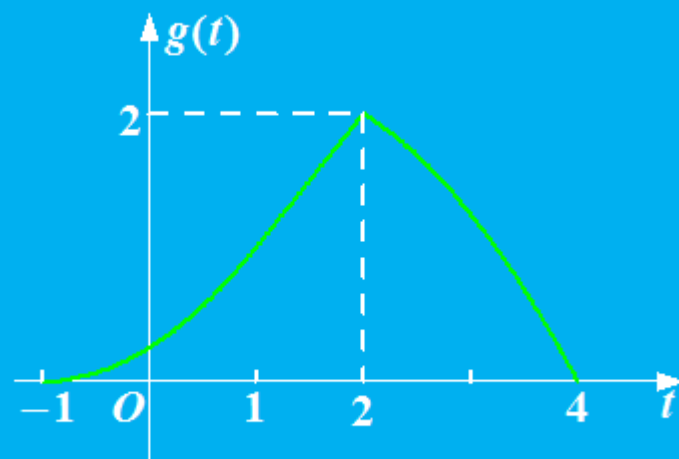
$$t-3 \geq 1 \quad \text{即 } t \geq 4$$

$$g(t) = 0$$

卷积结果



$$g(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} & -1 \leq t \leq 1 \\ t & 1 \leq t \leq 2 \\ -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + 2 & 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{其他 } t \end{cases}$$



积分上下限和卷积结果区间的确定

(1) 积分上下限

由 $f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) \neq 0$ 的范围（区间）确定。

上限取小，下限取大

(2) 卷积结果区间

	上限	下限			
一般规律：	$f_1(t)$	$[A, B]$		$f_1(t)$	$-1 \quad 1$
	$f_2(t)$	$[C, D]$	+	$f_2(t)$	$0 \quad 3$
	$g(t)$	$[A+C, B+D]$		$g(t)$	$-1 \quad 4$

当 $f_1(t)$ 或 $f_2(t)$ 为非连续函数时，卷积需分段，积分限分段定。

函数卷积的性质

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

$$x[n - n_1] * \delta[n - n_0] = x[n - n_1 - n_0]$$

$$x[n] * u[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]$$

$$u[n] * u[n] = \sum_{m=0}^n u[m] = u[n](n + 1)$$

函数卷积的性质（补充内容）

$$(\alpha^n u[n]) * (\beta^n u[n]) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^m u[m] \beta^{n-m} u[n-m]$$

$$= u[n] \sum_{m=0}^n \alpha^m \beta^{n-m} = u[n] \beta^n \sum_{m=0}^n (\alpha / \beta)^m$$

$$\alpha = \beta \quad (n+1) \alpha^n u[n]$$

$$\alpha \neq \beta \quad u[n] \beta^n \frac{1 - (\frac{\alpha}{\beta})^{n+1}}{1 - (\frac{\alpha}{\beta})} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} u[n]$$

函数卷积的性质（补充内容）

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$x(t - t_1) * \delta(t - t_0) = x(t - t_1 - t_0)$$

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$u(t) * u(t) = ? \quad [e^{\alpha t} u(t)] * [e^{\beta t} u(t)] = ?$$

函数卷积的性质（补充内容）

$$u(t) * u(t) = u(t) \int_0^t 1 d\tau = tu(t)$$

$$u(t) * u(t) * u(t) = u(t) \int_0^t \tau d\tau = \frac{1}{2} t^2 u(t)$$

$$[e^{\alpha t} u(t)] * [e^{\beta t} u(t)] = \begin{cases} te^{\alpha t} u(t) & \alpha = \beta \\ \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} u(t) & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

计算: $[e^{-at} \cdot \delta(t)] * t^n u(t)$

$$[e^{-at} \delta(t)] * t^n u(t) = \delta(t) * t^n u(t) = t^n u(t)$$

2.3

线性时不变系统的性质

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

所以,LTI系统特性可以完全由它的单位冲激响应来决定。

□2.3.1 交换率性质

变量置换

$$\begin{aligned}y[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\&= \sum_{k1=-\infty}^{\infty} h[n-k1]x[k1] = x[n] * h[n]\end{aligned}$$

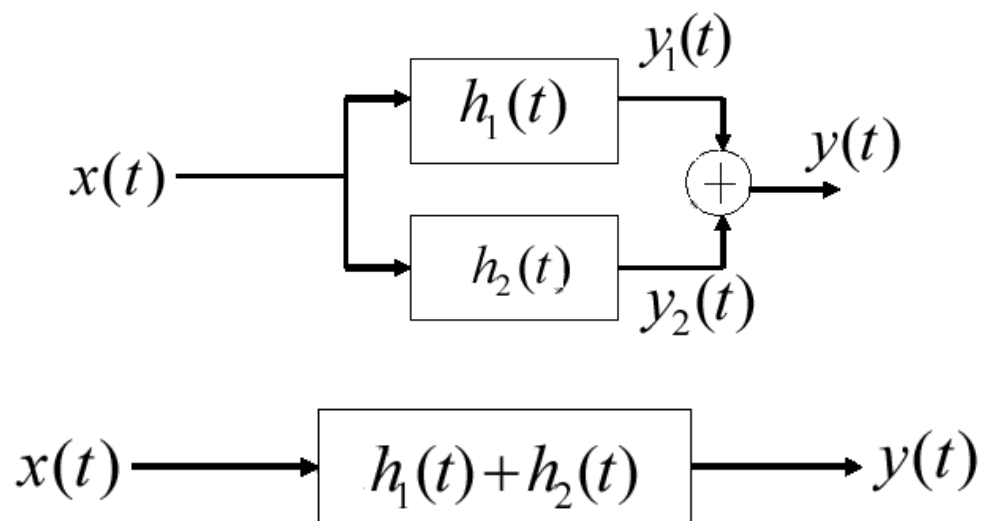
$$\begin{aligned}y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = h(t) * x(t)\end{aligned}$$

系统的串联与子系统的次序无关

□ 2.3.2 分配率性质

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



结论：两个LTI系统并联，其总的单位脉冲(冲激)响应等于各子系统单位脉冲(冲激)响应之和。

$$[x_1[n] + x_2[n]] * h[n] = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n]$$

$$[x_1(t) + x_2(t)] * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t)$$

结论： LTI系统对两个输入和的响应一定等于系统对单个输入响应的和。

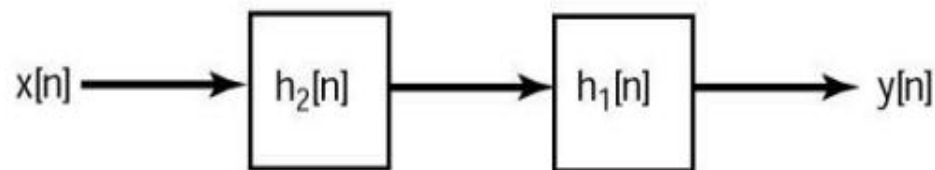
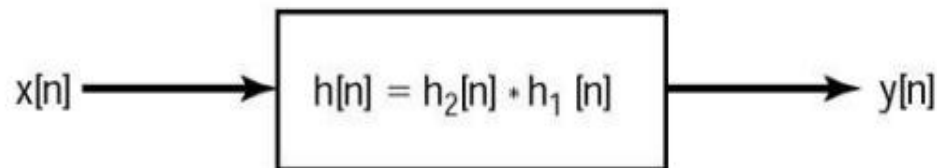
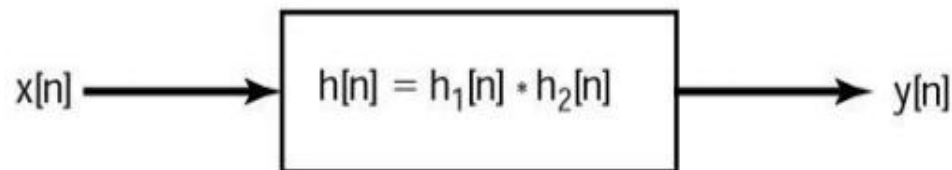
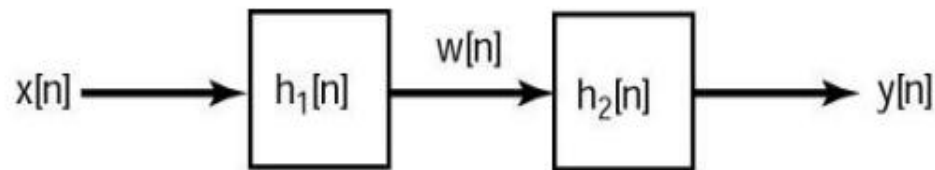
□ 2.3.3 结合率性质

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$

✓ 两个级联的系统可以等效为一个总的系统，其单位冲激响应等于两个子系统的单位冲激响应的卷积

✓ 总系统的相应与两个子系统的级联次序无关



□ 卷积积分其他性质

1、微分性质

$$\frac{d}{dt}(x(t) * h(t)) = \frac{d}{dt}x(t) * h(t) = \frac{d}{dt}h(t) * x(t)$$

2、积分性质

$$\int_{-\infty}^t (x(\tau) * h(\tau)) d\tau = \left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] * h(t) = \left[\int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \right] * x(t)$$

3、微分和积分性质

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$y(t) = \left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] * h'(t) = x'(t) * \left[\int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \right]$$

$$y(t) = x^{(n)}(t) * h^{(-n)}(t)$$

产生以上结论的前提条件:

- ①系统必须是LTI系统;
- ②所有涉及到的卷积运算必须收敛。

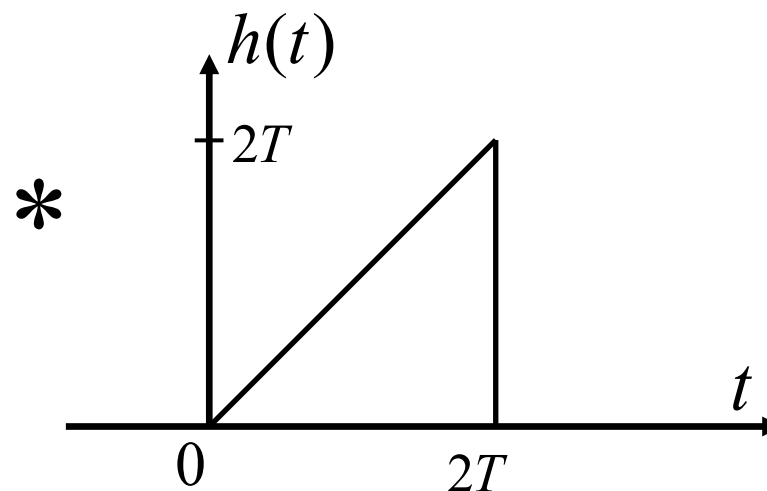
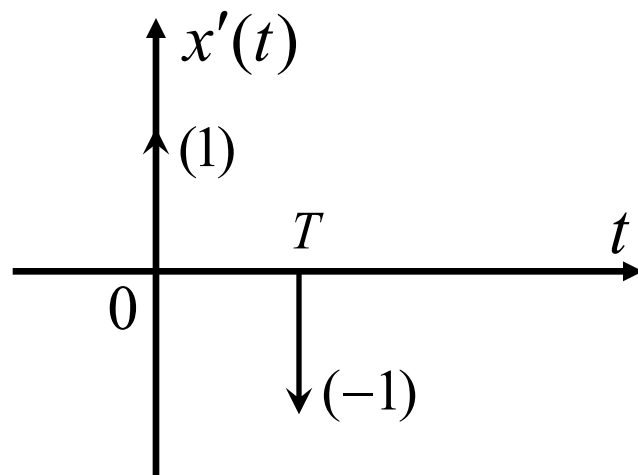
例题:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 2T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

将 $x(t)$ 微分一次有:

$$x'(t) = \delta(t) - \delta(t - T)$$



*

根据微分特性有:

$$\begin{aligned}y'(t) &= x'(t) * h(t) = h(t) * [\delta(t) - \delta(t - T)] \\&= h(t) - h(t - T)\end{aligned}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t y'(\tau) d\tau$$

LTI 系统可以由它的单位冲激/脉冲响应来表征，因而其特性（记忆性、可逆性、因果性、稳定性）都应在其单位冲激/脉冲响应中有所体现。

□ 2.3.4 LTI 系统的无记忆性

无记忆系统的单位脉冲/冲激响应为：

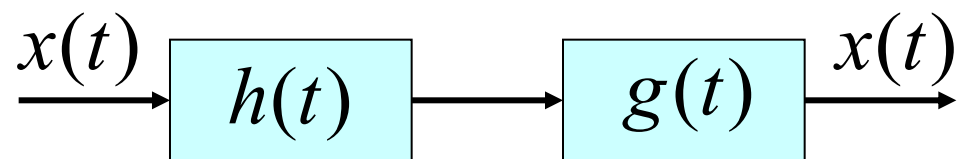
$$h[n] = k\delta[n]$$

$$h(t) = k\delta(t)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overset{\text{输入}}{x[k]} h[n-k] = x[n] * h[n]$$

□ 2.3.5 LTI系统的可逆性

如果LTI系统是可逆的，一定存在一个逆系统，且逆系统也是LTI系统，它们级联起来构成一个恒等系统。



$$h[n] * g[n] = \delta[n]$$

$$h(t) * g(t) = \delta(t)$$

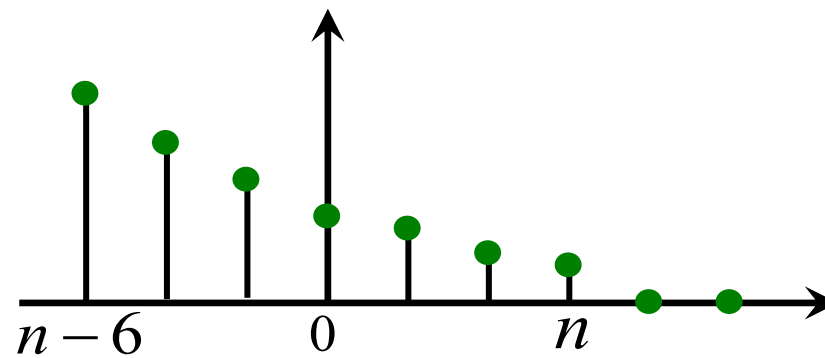
例如：延时器是可逆的LTI系统， $h(t) = \delta(t - t_0)$ ，其逆系统是
是 $g(t) = \delta(t + t_0)$ **显然有：**

$$h(t) * g(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$$

□ 2.3.6 LTI系统的因果性

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]h[n-m] + \sum_{m=n+1}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

□ LTI系统的因果性



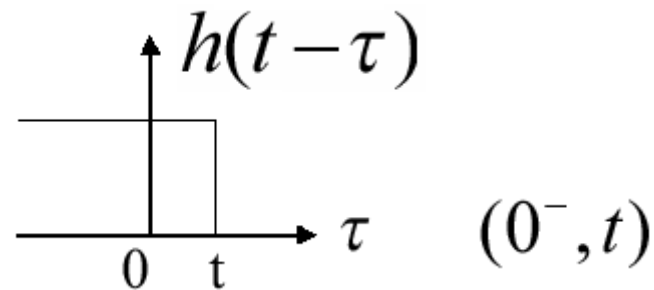
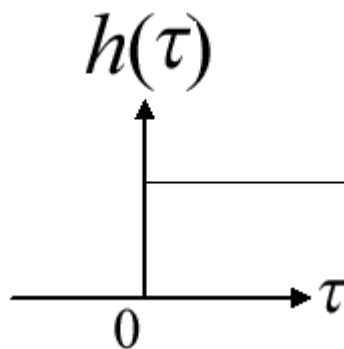
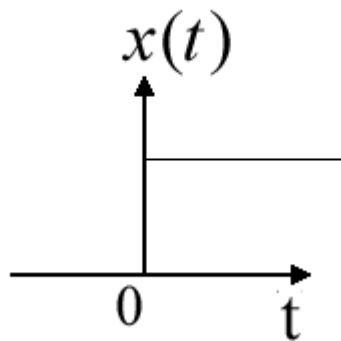
$$h[n] = 0 \quad n < 0 \qquad h(t) = 0 \quad t < 0$$

一个因果的LTI系统的单位冲激响应在冲激出现之前必须为零。

□ 因果性信号卷积的上下限确定

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

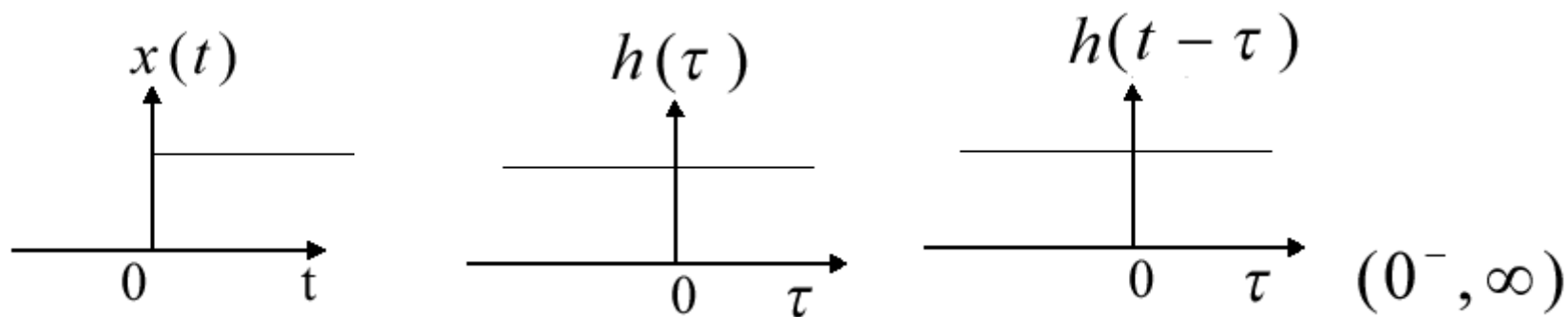
1、若 $x(t)$ 和 $h(t)$ 均为因果信号：



□ 因果性信号卷积的上下限确定

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

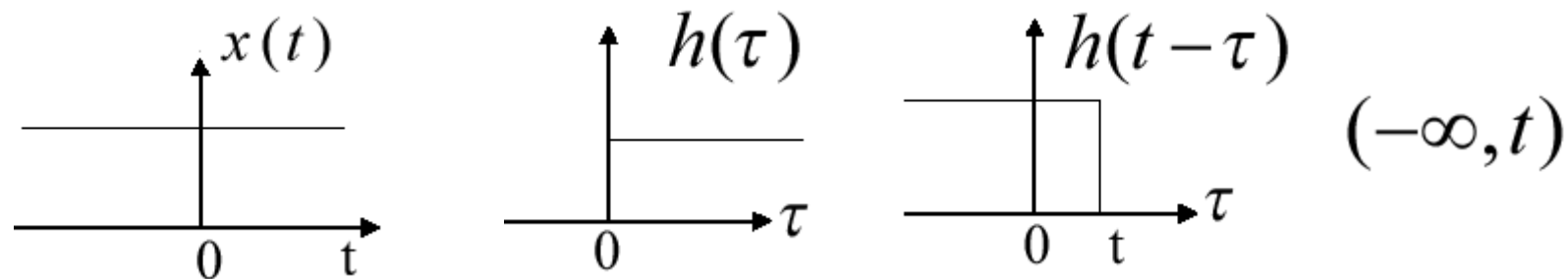
2、若 $x(t)$ 为因果信号， $h(t)$ 为无时限信号



□ 因果性信号卷积的上下限确定

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

3、若 $x(t)$ 为无时限信号, $h(t)$ 为因果信号



4、若 $x(t)$ 为无时限信号, $h(t)$ 为无时限信号 $(-\infty, \infty)$

□ 2.3.7 LTI系统的稳定性

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

- ✓ 单位脉冲响应是绝对可和的
- ✓ 单位冲激响应是绝对可积的

对应下面每一个冲激响应，确定系统是否为(i)因果，(ii)稳定

(1) $h(t) = u(t+1)$

(2) $h[n] = (1/2)^{|n|}$

(3) $h(t) = 3\delta(t)$

对应下面每一个冲激响应，确定系统是否为(i)因果，(ii)稳定

(1) $h(t) = u(t+1)$

(2) $h[n] = (1/2)^{|n|}$

(3) $h(t) = 3 \delta(t)$

(1) 非因果，非稳定

(2) 非因果，稳定

(3) 因果，稳定

□ 2.3.8 LTI系统的单位阶跃响应

在工程实际中，也常用单位阶跃响应来描述LTI系统。单位阶跃响应就是系统对 $u(t)$ 或 $u[n]$ 所产生的响应。因此有：

CT case: $\delta(t) \longrightarrow$ CT LTI $\longrightarrow h(t)$

DT case: $\delta[n] \longrightarrow$ DT LTI $\longrightarrow h[n]$

CT case: $u(t) \longrightarrow$ CT LTI $\longrightarrow s(t)$

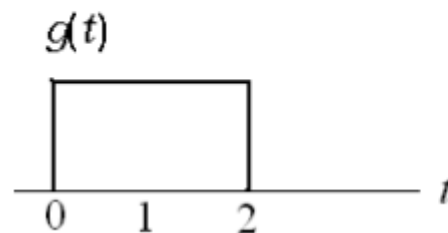
DT case: $u[n] \longrightarrow$ DT LTI $\longrightarrow s[n]$

$$s(t) = u(t) * h(t) \quad s(n) = u(n) * h(n)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad h(t) = \frac{d}{dt} s(t)$$

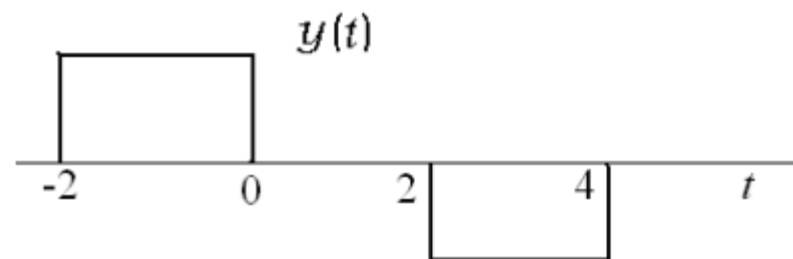
$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(k) \quad h(n) = s(n) - s(n-1)$$

一LTI系统阶跃响应 $g(t)$ 如图所示。若系统的输入为 $x(t) = 2[u(t+2) - u(t-2)]$ 利用线性与时不变特性确定并画出系统的输出 $y(t)$ 。

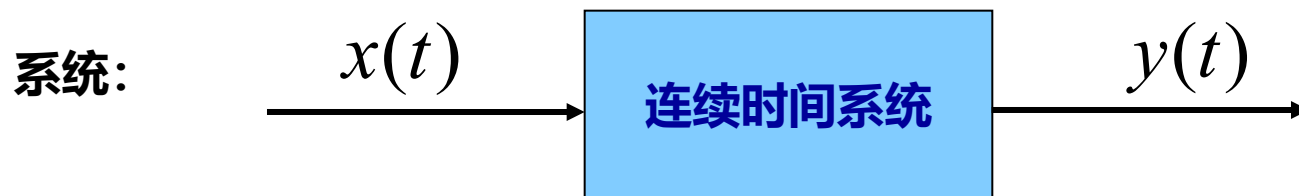


$$u(t) \rightarrow g(t)$$

$$x(t) = 2[u(t+2) - u(t-2)] \rightarrow 2[g(t+2) - g(t-2)] = y(t)$$



□ 2.4.1 线性常系数微分方程

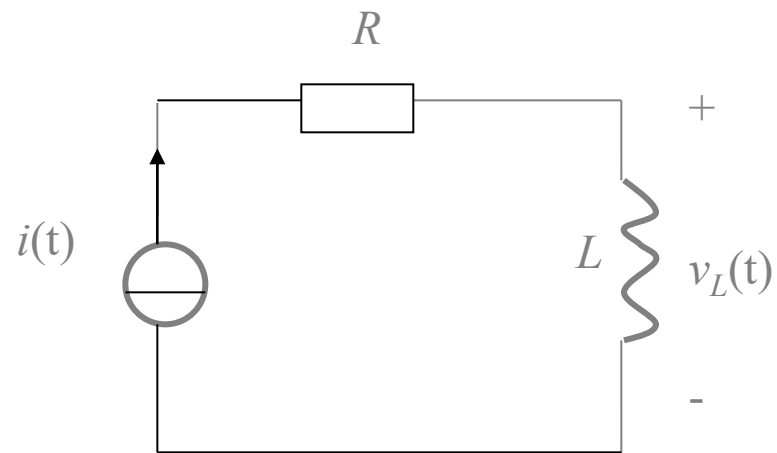


- 许多实际系统可以用线性系统来模拟。
- 若系统的参数不随时间而改变，则该系统可以用线性常系数微分方程来描述。

- 根据实际系统的物理特性列写系统的微分方程。
- 对于电路系统，主要是根据元件特性约束和网络拓扑约束列写系统的微分方程。

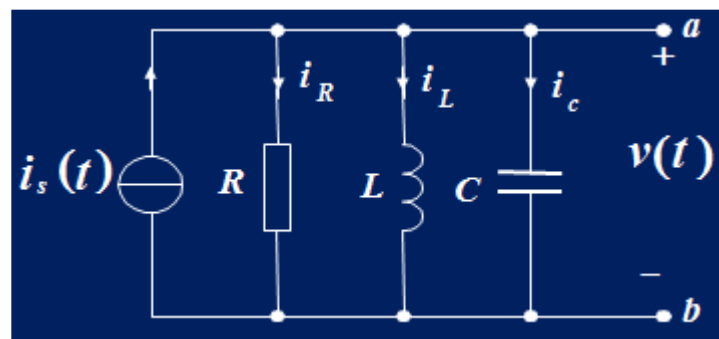
元件特性约束：表征元件特性的关系式。例如二端元件电阻、电容、电感各自的电压与电流的关系以及四端元件互感的初、次级电压与电流的关系等等。

网络拓扑约束：由网络结构决定的电压电流约束关系， KCL ， KVL 。



$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}$$

求并联电路的端电压 $v(t)$ 与激励 $i_s(t)$ 间的关系。



电阻 $i_R(t) = \frac{1}{R} v(t)$

电感 $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$

电容 $i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$

根据KCL $i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = i_s(t)$

代入上面元件伏安关系，并化简有

$$C \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L} v(t) = \frac{di_s(t)}{dt}$$

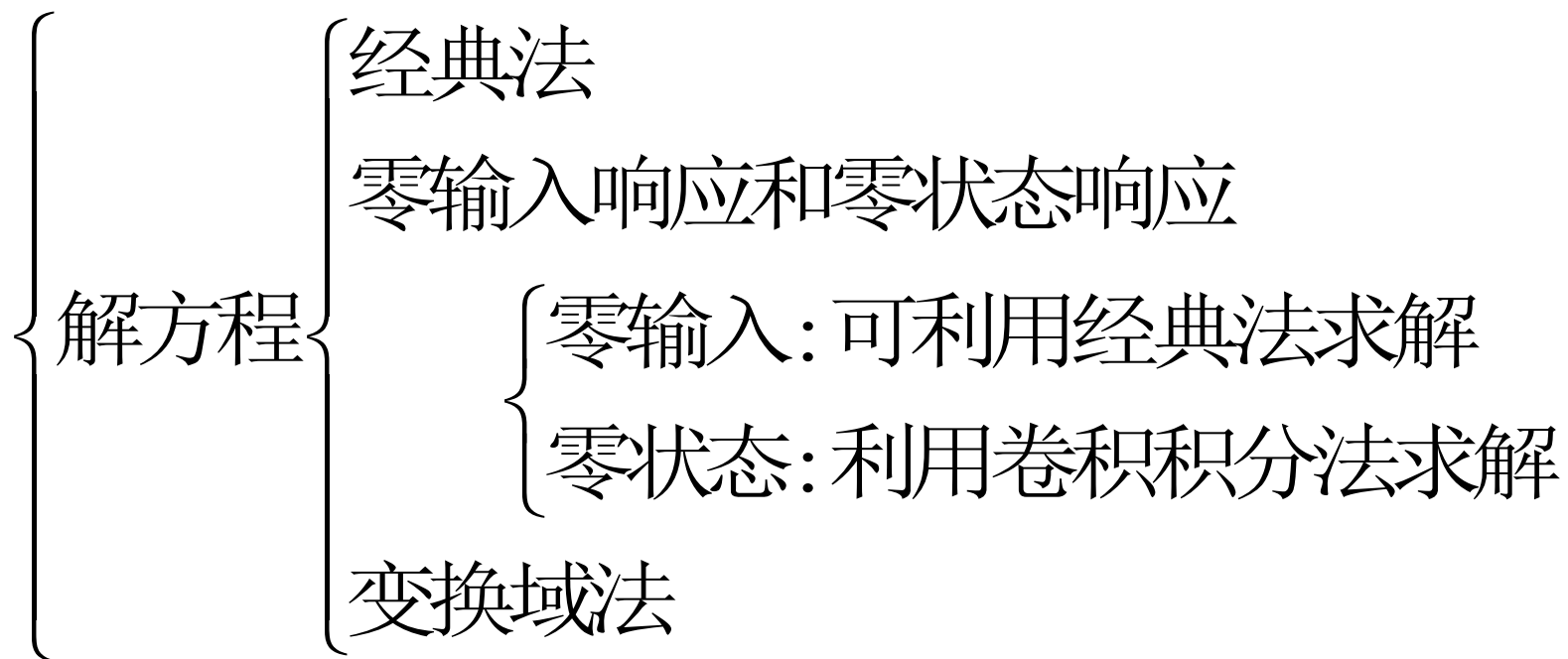
这是一个代表RCL并联电路系统的二阶微分方程。

一般形式：

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \quad a_k, b_k \text{ 均为常数}$$

阶次：方程的阶次由独立的动态元件的个数决定。

分析系统的方法：列写方程，求解方程。



求解方程时域经典法就是：齐次解 $y_h(t)$ + 特解 $y_p(t)$ 。

齐次解：由微分方程→齐次方程→特征方程→求出特征根→写出齐次解形式

微分方程：
$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \quad a_k, b_k \text{ 均为常数}$$

齐次方程：
$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

特征方程：
$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \cdots + a_N \lambda^N = 0$$

特征方程： $\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \cdots + a_N \lambda^N = 0$

特征根没有重根： $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$

齐次解： $y_h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{\lambda_k t}$

注意重根情况处理方法。若 λ_1 是 i 重根，和它有关的为 i 项。

$$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_{i-1} t^{i-1}) e^{\lambda_1 t}$$

例题： 求微分方程 $\frac{d^3}{dt^3} y(t) + 7\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 16\frac{d}{dt} y(t) + 12y(t) = x(t)$ 的齐次解。

系统的特征方程为

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12 = 0$$

特征根

$$(\lambda + 2)^2 (\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 (\text{重根}), \lambda_2 = -3$$

对应的齐次解为

$$y_h(t) = (A_1 t + A_2) e^{-2t} + A_3 e^{-3t}$$

特解：根据微分方程右端函数式形式，设含待定系数的特解函数式→代入原方程，比较系数定出特解。

几种典型激励函数相应的特解

激励函数 $x(t)$	响应函数的特解
$E(\text{常数})$	$B(\text{常数})$
t^p	$B_1 t^p + B_2 t^{p-1} + \cdots + B_p t + B_{p+1}$
$e^{\alpha t}$	$B e^{\alpha t}$
$\cos(\omega t)$	$B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$
$\sin(\omega t)$	
$t^p e^{\alpha t} \sin(\omega t)$	$(B_1 t^p + B_2 t^{p-1} + \cdots + B_p t + B_{p+1}) e^{\alpha t} \cos(\omega t)$ $+ (D_1 t^p + D_2 t^{p-1} + \cdots + D_p t + D_{p+1}) e^{\alpha t} \sin(\omega t)$
$t^p e^{\alpha t} \cos(\omega t)$	

若表中特解和齐次解重复，特解中增加 t 乘以表中特解，如有 k 次重复，依次乘以

$$t, t^2, t^3 \cdots, t^k$$

给定微分方程式
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

如果已知:(1) $x(t)=t^2$; (2) $x(t)=e^t$,分别求两种情况下此方程的特解。

给定微分方程式
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

如果已知:(1) $x(t)=t^2$; (2) $x(t)=e^t$, **分别求两种情况下此方程的特解。**

(1) 将 $x(t)=t^2$ 代入方程右端, 得到 $t^2 + 2t$,

$$y_p(t) = B_1 t^2 + B_2 t + B_3$$

这里, B_1, B_2, B_3 为待定系数。 **将此式代入方程得到**

$$3B_1 t^2 + (4B_1 + 3B_2) t + (2B_1 + 2B_2 + 3B_3) = t^2 + 2t$$

等式两端各对应幂次的系数应相等，于是有

$$\begin{cases} 3B_1 = 1 \\ 4B_1 + 3B_2 = 2 \\ 2B_1 + 2B_2 + 3B_3 = 0 \end{cases}$$

联解得到

$$B_1 = \frac{1}{3}, \quad B_2 = \frac{2}{9}, \quad B_3 = -\frac{10}{27}$$

所以，特解为

$$y_p(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t - \frac{10}{27}$$

(2) 当 $x(t)=e^t$ 时, 很明显, 可选 $y_p(t)=Be^t$ 。 B 是待定系数。
代入方程后有:

$$Be^t + 2Be^t + 3Be^t = e^t + e^t$$

$$B = \frac{1}{3}$$

全 解：齐次解+特解，由初始条件定出齐次解的系数。

$$y(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{\lambda_k t} + y_p(t)$$

一般将激励信号加入的时刻定义为 $t = 0$ ，响应为 $t \geq 0_+$ 时的方程的解，初始条件

$$y(0_+), \frac{dy(0_+)}{dt}, \frac{d^2 y(0_+)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{N-1} y(0_+)}{dt^{N-1}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 7 \frac{d}{dt} y(t) + 10y(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 6 \frac{d}{dt} x(t) + 4x(t)$$

$$x(t) = 4u(t), y(0_+) = \frac{14}{5}, y'(0_+) = -2 \quad \text{求系统的完全响应。}$$

系统的特征方程

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0 \quad \text{即} \quad (\lambda + 2)(\lambda + 5) = 0$$

特征根

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -5$$

齐次解

$$y_h(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} \quad (t \geq 0_+)$$

特解

由于 $t \geq 0_+$ 时 $x(t) = 4u(t)$

方程右端自由项为 4×4 , 因此令特解 $y_p(t) = B$, 代入方程

$$10B = 4 \times 4 \quad B = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

要求系统的完全响应为

$$y(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} + \frac{8}{5} \quad (t \geq 0_+)$$

完全响应为

$$y(t) = \left(\frac{4}{3} e^{-2t} - \frac{2}{15} e^{-5t} + \frac{8}{5} \right)$$

$$y(0_+) = \frac{14}{5}$$

$$\frac{d}{dt} y(0_+) = -2$$

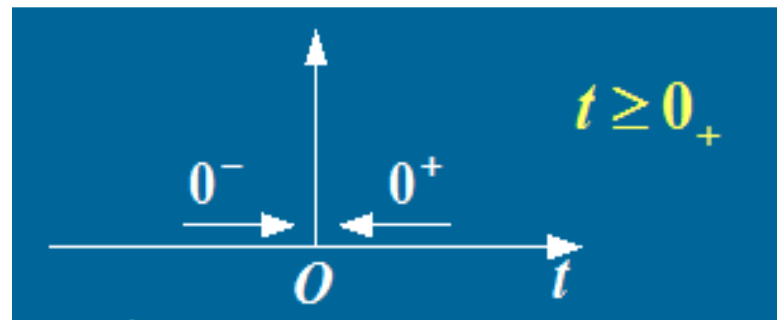
求得

$$\begin{cases} y(0_+) = A_1 + A_2 + \frac{8}{5} = \frac{14}{5} \\ \frac{d}{dt} y(0_+) = -2A_1 - 5A_2 = -2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} A_1 = \frac{4}{3} \\ A_2 = -\frac{2}{15} \end{cases}$$

要求的完全响应为

$$y(t) = \left(\frac{4}{3} e^{-2t} - \frac{2}{15} e^{-5t} + \frac{8}{5} \right) \quad (t \geq 0_+)$$

起始点的跳变:



起始状态— 0^- ：表明起始储能，加入输入信号之前的状态

初始状态— 0^+ ：输入信号加入瞬间状态

$$y^{(k)}(0_-) = \left[y(0_-), \frac{dy(0_-)}{dt}, \frac{d^2 y(0_-)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y(0_-)}{dt^{n-1}} \right]$$

$$y^{(k)}(0_+) = \left[y(0_+), \frac{dy(0_+)}{dt}, \frac{d^2 y(0_+)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y(0_+)}{dt^{n-1}} \right]$$

- 对于一个具体的电网络，系统的 0_- 状态就是系统中储能元件的储能情况；
- 一般情况下换路期间电容两端的电压和流过电感中的电流不会发生突变。这就是在电路分析中的换路定则：
$$v_C(0_-) = v_C(0_+), i_L(0_-) = i_L(0_+).$$
- 但是当有冲激电流强迫作用于电容或有冲激电压强迫作用于电感， 0_- 到 0_+ 状态就会发生跳变。
- 当系统用微分方程表示时，系统从 0_- 到 0_+ 状态有没有跳变取决于微分方程右端自由项是否包含 $\delta(t)$ 及其各阶导数项。

零状态响应:

$$x(t) = e^{-t} \quad y_{zs1}(t) = A_{zs1}e^{-2t} + y_p(t)$$

$$y_p(t) = B_1e^{-t}$$

代入微分方程 $B_1 = 1$

$$y_{zs1}(t) = A_{zs1}e^{-2t} + e^{-t}$$

$$y(0_-) = 0 \quad 0 = A_{zs1} + 1$$

$$A_{zs1} = -1$$

$$y_{zs1}(t) = -e^{-2t} + e^{-t}$$

$$y(t) = 2e^{-2t} - e^{-2t} + e^{-t} = e^{-2t} + e^{-t}$$

冲激函数匹配法确定初始条件:

配平的原理: $t=0$ 时刻微分方程左右两端的 $\delta(t)$ 及各阶导数应该平衡(其他项也应该平衡, 我们讨论初始条件, 可以不管其他项)

方程 $\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = 3\delta'(t)$ 可知

方程右端含 $\delta'(t)$ 项, 它一定属于 $\frac{d}{dt}y(t)$

设 $\frac{d}{dt}y(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t)$

$\Delta u(t)$:

表示 0_- 到 0_+ 相对单位跳变函数

则 $y(t) = a\delta(t) + b\Delta u(t)$

代入方程 $a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t) + 3a\delta(t) + 3b\Delta u(t) = 3\delta'(t)$

得出 $\begin{cases} a = 3 \\ b + 3a = 0 \\ c + 3b = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a = 3 \\ b = -9 \\ c = 27 \end{cases}$

所以得 $y(0_+) - y(0_-) = b = -9$ 即 $y(0_+) = y(0_-) - 9$

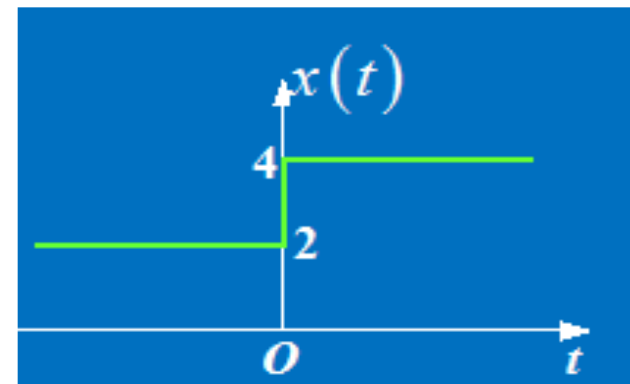
$$\int_{0_-}^{0_+} \Delta u(t) dt = 0$$

描述LTI的微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 7 \frac{d}{dt} y(t) + 10 y(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 6 \frac{d}{dt} x(t) + 4 x(t)$$

输入 $x(t)$ 如图，已知 $y(0_-) = \frac{4}{5}$ 和 $\frac{d}{dt} y(0_-) = 0$,

用冲激函数匹配法求 $y(0_+)$ 和 $\frac{d}{dt} y(0_+)$ 。



(1) 将 $x(t)=2+2u(t)$ 代入微分方程, $t \geq 0$ 得

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 7 \frac{d}{dt} y(t) + 10 y(t) = 2\delta'(t) + 12\delta(t) + 8\Delta u(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 7 \frac{d}{dt} y(t) + 10 y(t) = 2\delta'(t) + 12\delta(t) + 8\Delta u(t)$$

方程右端的冲激函数项最高阶次是 $\delta'(t)$ ，因而有

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} y(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) = a\delta(t) + b\Delta u(t) \\ y(t) = a\Delta u(t) \end{cases} \quad (0_- < t < 0_+)$$

代入微分方程

$$\begin{aligned} & [a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t)] + 7[a\delta(t) + b\Delta u(t)] + 10a\Delta u(t) \\ & = 2\delta'(t) + 12\delta(t) + 8\Delta u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b + 7a = 12 \\ c + 7b + 10a = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y(0_+) - y(0_-) = a = 2 \\ \frac{d}{dt} y(0_+) - \frac{d}{dt} y(0_-) = b = -2 \\ \frac{d^2}{dt^2} y(0_+) - \frac{d^2}{dt^2} y(0_-) = c = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0_+) = 2 + y(0_-) = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5} \\ \frac{d}{dt} y(0_+) = -2 + \frac{d}{dt} y(0_-) = -2 \end{cases}$$

各种系统响应定义

(1)自由响应： 也称固有响应，由系统本身特性决定，与外加激励形式无关。对应于齐次解。

强迫响应： 形式取决于外加激励。对应于特解。

(2)暂态响应： 是指激励信号接入一段时间内，完全响应中暂时出现的有关成分，随着时间 t 增加，它将消失。

稳态响应： 由完全响应中减去暂态响应分量即得稳态响应分量。

(3)零输入响应： 没有外加激励信号的作用，只由起始状态（起始时刻系统储能）所产生的响应。

零状态响应： 不考虑原始时刻系统储能的作用（起始状态等于零），由系统的外加激励信号产生的响应。

■ 完全解=零输入响应+零状态响应---现代方法

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

$y_{zi}(t)$ 参数由起始状态确定---只和起始储能有关

$y_{zs}(t)$ 参数由输入信号确定---只和输入信号有关

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

零输入响应:

满足: $\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$ **及** $\{y^k(0_-), k = 0, 1, \dots, N-1\}$

实际上是求系统方程的齐次解，由非零的系统状态值 决定的初始值求出待定系数。

$$y_{zi}(t) = \sum_{k=1}^N A_{zik} e^{\lambda_k t}$$

零状态响应:

满足: $\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \quad a_k, b_k \text{ 均为常数}$

及 $\{y^k(0_-) = 0, k = 0, 1, \dots, N-1\}$

$$y_{zs}(t) = \sum_{k=1}^N A_{zsk} e^{\lambda_k t} + y_p(t)$$

冲激函数匹配法求初始状态。

例：已知一个系统的微分方程：

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) \quad y(0_-) = 2$$

求输入为 $x(t) = e^{-t}$ 时的输出响应。

解：零输入响应： $y_{zi}(t)$

特征方程： $\lambda + 2 = 0$

$$\lambda = -2$$

$$y_{zi}(t) = Ae^{-2t}$$

代入 $y(0_-) = 2$ $A = 2$ $y_{zi}(t) = 2e^{-2t}$

零状态响应:

$$x(t) = e^{-t} \quad y_{zs1}(t) = A_{zs1}e^{-2t} + y_p(t)$$

$$y_p(t) = B_1e^{-t}$$

代入微分方程 $B_1 = 1$

$$y_{zs1}(t) = A_{zs1}e^{-2t} + e^{-t}$$

$$y(0_-) = 0 \quad 0 = A_{zs1} + 1$$

$$A_{zs1} = -1$$

$$y_{zs1}(t) = -e^{-2t} + e^{-t}$$

$$y(t) = 2e^{-2t} - e^{-2t} + e^{-t} = e^{-2t} + e^{-t}$$

□ 2.4.2 线性常系数差分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

✓ 齐次方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0$$

✓ 对于LTI系统，如果是因果系统，则具有一组零附加条件，称为零起始条件。

✓ 离散时间情况可以用递归方程来求解。

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

✓递归方程

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\}$$

✓称为无限冲激响应系统 (IIR)

✓非递归方程：在 $N=0$ 的情况下，上述方程演变为：

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

✓称为有限冲激响应系统 (FIR)

解法

1.迭代法

2.时域经典法：齐次解+特解

3.零输入响应+零状态响应
利用卷积求系统的零状态响应

4. z 变换法 $\rightarrow$ 反变换 $\rightarrow y(n)$

一. 迭代法

解差分方程的基础方法

差分方程本身是一种递推关系,

但得不到输出序列 $y(n)$ 的解析式

例：

已知 $y(n) = 3y(n-1) + u(n)$, 且 $y(-1) = 0$, 求解方程。

$$n=0 \quad y(0) = 3y(-1) + 1 = 1$$

$$n=1 \quad y(1) = 3y(0) + 1 = 4$$

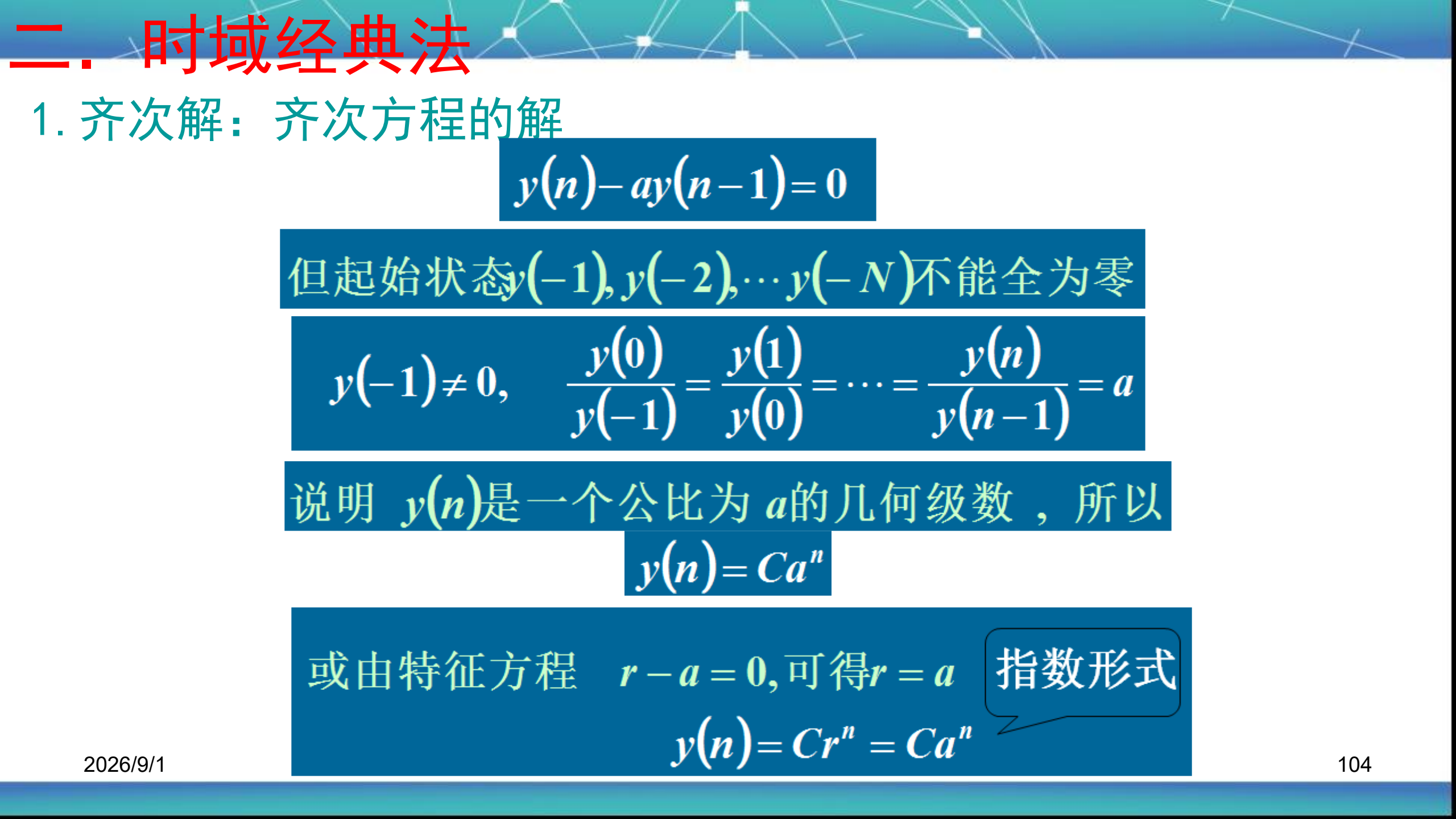
$$n=2 \quad y(2) = 3y(1) + 1 = 13$$

$$n=3 \quad y(3) = 3y(2) + 1 = 40$$

.....

由递推关系, 可得输出值:

$$y(n) = \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, 4, 13, 40, \dots \right\}$$



二. 时域经典法

1. 齐次解：齐次方程的解

$$y(n) - ay(n-1) = 0$$

但起始状态 $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ 不能全为零

$$y(-1) \neq 0, \quad \frac{y(0)}{y(-1)} = \frac{y(1)}{y(0)} = \dots = \frac{y(n)}{y(n-1)} = a$$

说明 $y(n)$ 是一个公比为 a 的几何级数，所以

$$y(n) = Ca^n$$

或由特征方程 $r - a = 0$, 可得 $r = a$ 指数形式

$$y(n) = Cr^n = Ca^n$$

求待定系数 C 由边界决定

设 $y(-1) = \frac{2}{a}$, 代入原方程, 令 $n = 0$

$$y(0) = ay(-1) = 2$$

由方程解 $y(n)$

$$y(0) = Ca^0 = C \quad \text{所以 } C = 2$$

齐次解

$$y(n) = 2a^n$$

求差分方程齐次解步骤

差分方程→

特征方程→特征根→

$y(n)$ 的解析式→由起始状态定常数

根据特征根，解的三种情况

1. 无重根 $r_1 \neq r_2 \neq \cdots \neq r_n$ n 阶方程

$$y(n) = C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n + \cdots + C_n(r_n)^n$$

求解二阶差分方程 $y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = 0$
已知 $y(0) = 2, y(1) = 1$ 。

特征方程 $r^2 - 5r + 6 = 0 \quad (r-2)(r-3) = 0$

特征根 $r_1 = 2, r_2 = 3$

齐次解 $y(n) = C_1(2)^n + C_2(3)^n$

定 C_1, C_2

$n = 0$	$y(0) = C_1 + C_2 = 2$
$n = 1$	$y(1) = 2C_1 + 3C_2 = 1$

解出 $C_1 = 5, C_2 = -3$
所以 $y(n) = 5(2)^n - 3(3)^n$

2. 有重根

求方程 $y(n) + 6y(n-1) + 12y(n-2) + 8y(n-3) = 0$ 的解。

特征方程

$$r^3 + 6r^2 + 12r + 8 = 0 \quad (r + 2)^3 = 0$$

所以 $r = -2$ 三重根

$$y(n) = C_1(-2)^n + C_2 n(-2)^n + C_3 n^2(-2)^n$$

给定边界条件即可求出常数 C_1, C_2, C_3

3. 有共轭复数根

设 $r_1 = Me^{j\varphi}$ $r_2 = Me^{-j\varphi}$

$$\begin{aligned}y(n) &= C_1 (r_1)^n + C_2 (r_2)^n \\&= C_1 (Me^{j\varphi})^n + C_2 (Me^{-j\varphi})^n \\&= C_1 M^n (\cos n\varphi + j\sin n\varphi) + C_2 M^n (\cos n\varphi - j\sin n\varphi) \\&= PM^n \cos n\varphi + QM^n \sin n\varphi\end{aligned}$$

P, Q 为待定系数

$M = 1$ $y(n)$ 为等幅正弦序列

$M > 1$ $y(n)$ 为增幅正弦序列

$M < 1$ $y(n)$ 为减幅正弦序列

2. 特解

线性时不变系统输入与输出有相同的形式

输入	输出
$x(n) = e^{an}$	$y(n) = Ae^{an}$
$x(n) = e^{j\omega n}$	$y(n) = Ae^{j\omega n}$
$x(n) = \cos(\omega n)$	$y(n) = A \cos(\omega n + \theta)$
$x(n) = \sin(\omega n)$	$y(n) = A \sin(\omega n + \theta)$
$x(n) = n^k$	$y(n) = A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + \cdots + A_1 n + A_0$
$x(n) = A$	$y(n) = C$
$x(n) = (r)^n$	$y(n) = C(r)^n$
$x(n) = (r)^n$ (r 与特征根重)	$y(n) = C_1 n(r)^n + C_2 (r)^n$

$$\left. \begin{aligned} y(n) + 2y(n-1) &= 5u(n) \\ \text{且 } y(-1) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{求全解。}$$

$$r + 2 = 0 \quad r = -2$$

齐次解

$$y_h(n) = C_1(-2)^n$$

特解 因为 $x(n) = 5u(n)$ $n \geq 0$ 时全为 5 (常数)

$$\text{所以 } y_p(n) = C$$

$$\text{代入原方程求特解 } C + 2C = 5 \quad (n \geq 0)$$

$$\text{所以 } C = \frac{5}{3}$$

全解形式

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n) = C_1(-2)^n + \frac{5}{3}$$

由 $y(-1)=1$ 迭代出

$$n=0 \quad y(0)=5-2y(-1)=3$$

代入 解 $y(n)=C_1(-2)^n + \frac{5}{3}$, 得

$$y(0)=3=C_1 + \frac{5}{3}$$

$$\text{所以 } C_1 = \frac{4}{3}$$

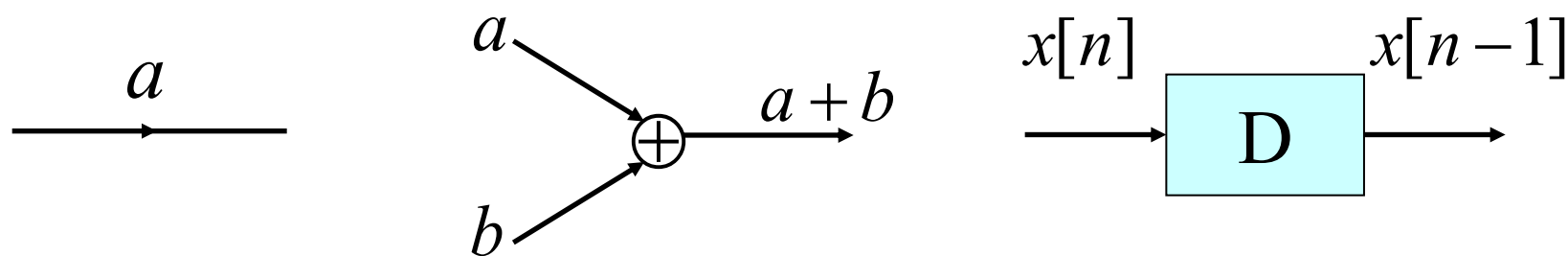
$$\text{所以 } y(n) = \frac{4}{3}(-2)^n + \frac{5}{3} \quad n \geq 0$$

□ 2.4.3 用微分方程和差分方程描述LTI系统方框图表示

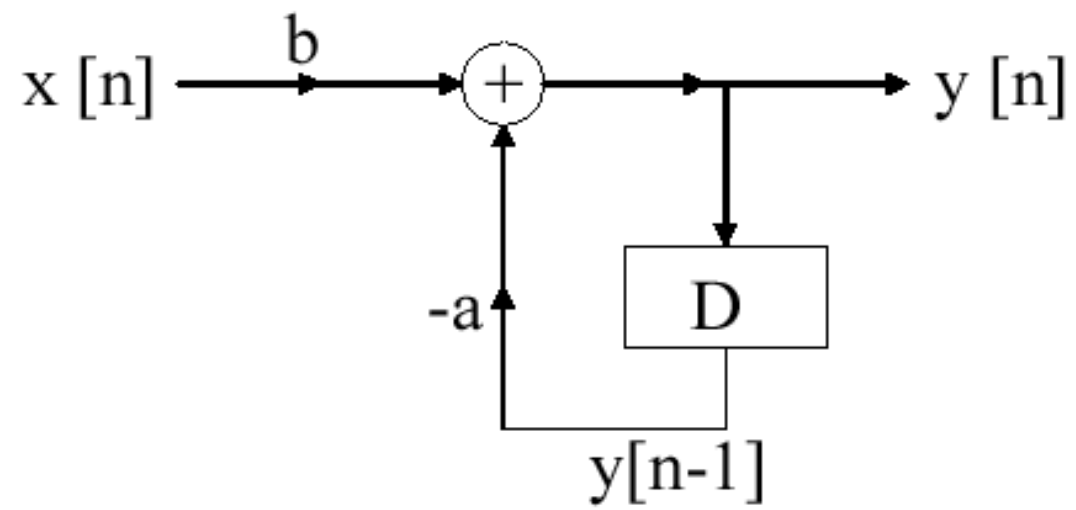
□ 差分方程描述LTI系统方框图表示

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

乘系数、相加、移位分别表示如下：



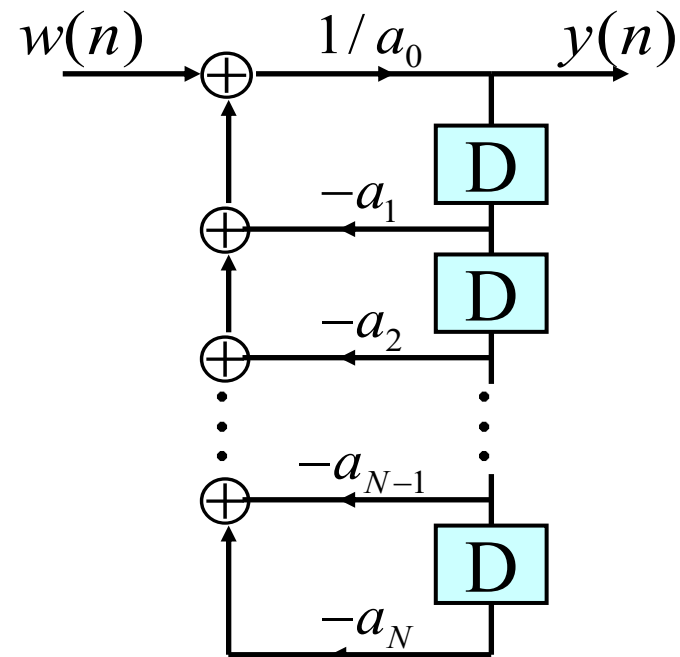
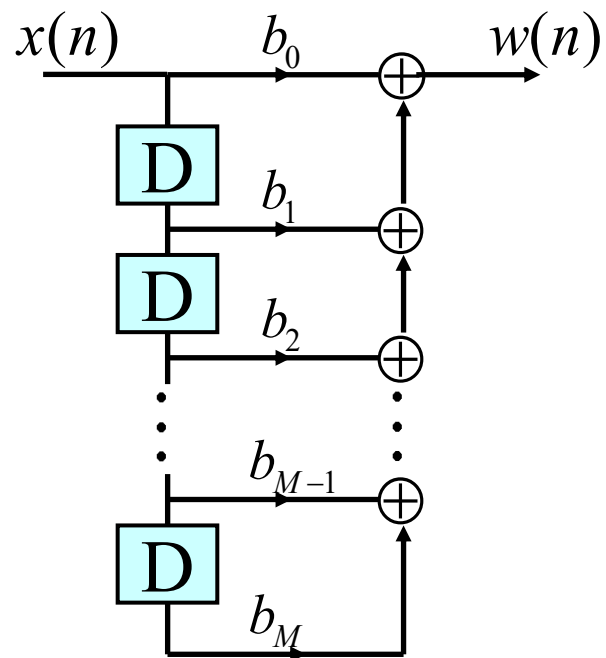
$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$



$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

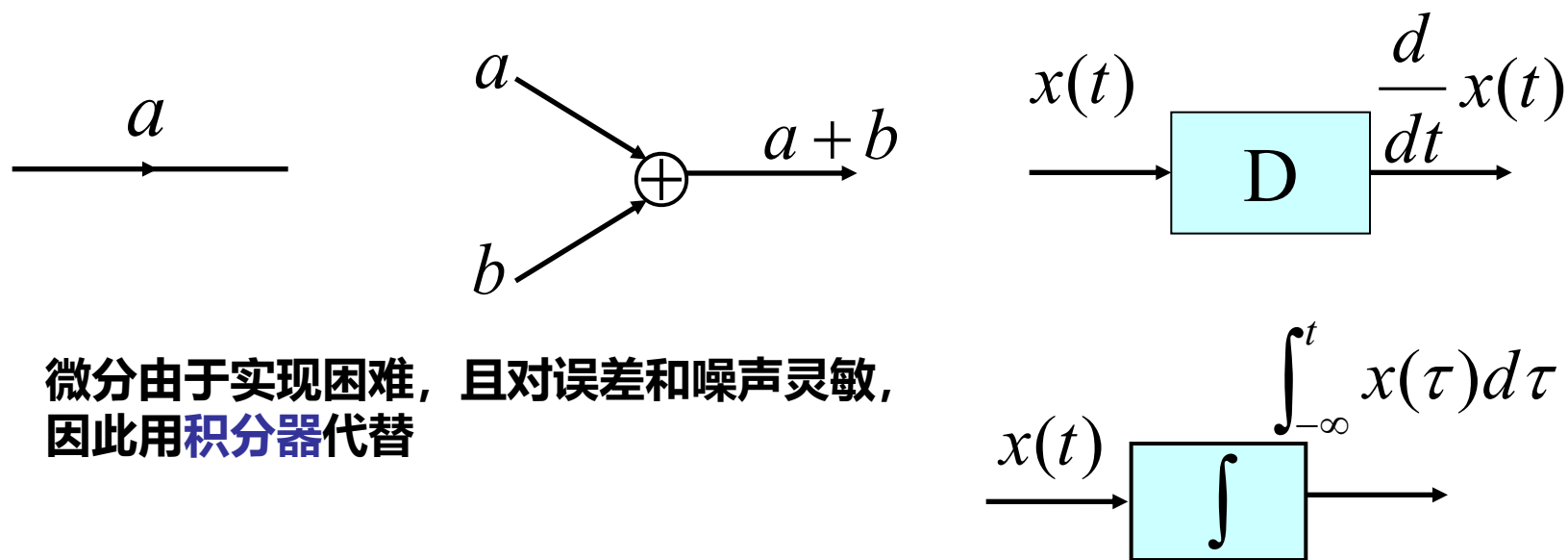
$$w[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ w[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\}$$



□ 微分方程描述LTI系统方框图表示

乘系数、相加、微分分别表示如下：

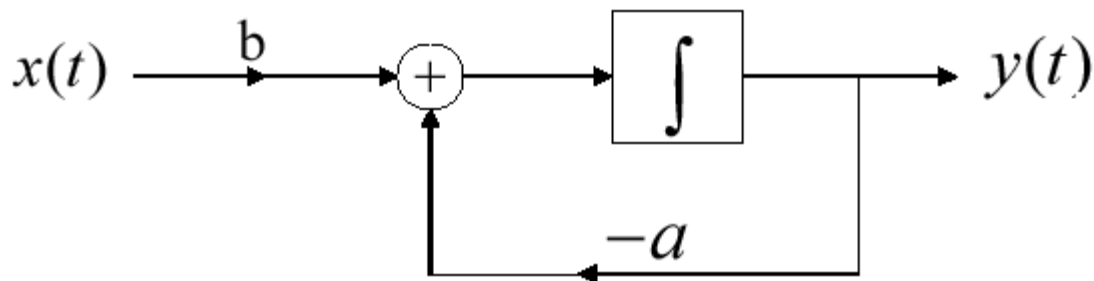


微分由于实现困难, 且对误差和噪声灵敏,
因此用**积分器**代替

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

如果所描述的系统是初始松弛的，得

$$y(t) = \int_{-\infty}^t [bx(\tau) - ay(\tau)] d\tau$$



如果积分器是从 t_0 开始的，则公式变成如下形式：

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t [bx(\tau) - ay(\tau)] d\tau$$

2.5 奇异函数

■通过卷积定义 $\delta(t)$

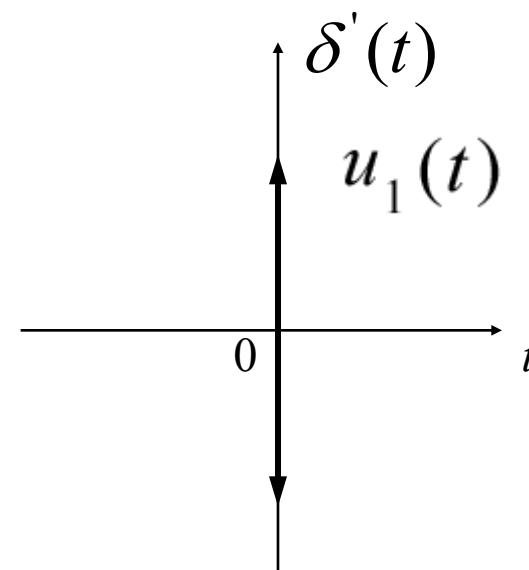
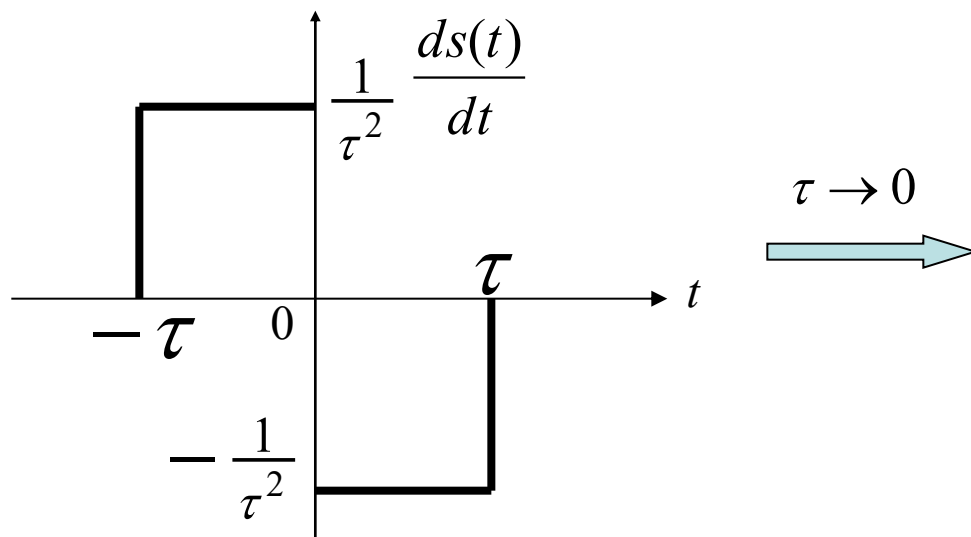
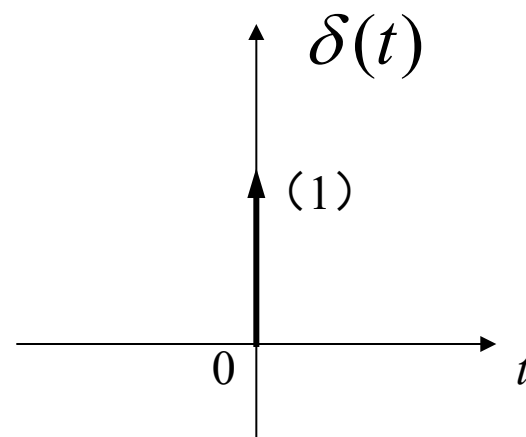
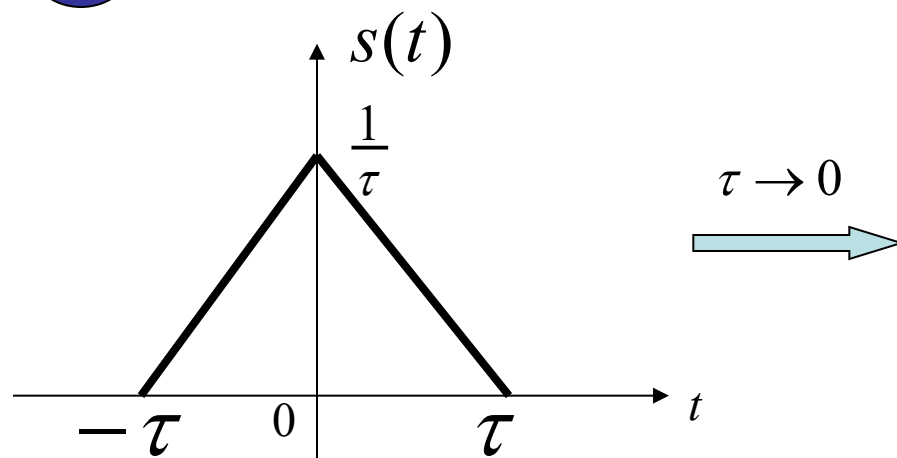
✓ 从系统的角度,可以说 $\delta(t)$ 是一个恒等系统的单位冲激响应,因此,
——这就是在卷积运算下的定义。
 $x(t) = x(t) * \delta(t)$

$$\delta(t)$$

$$\because x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$\therefore \delta(t) * \delta(t) = \delta(t) \quad \delta(t - t_0) * \delta(t) = \delta(t - t_0)$$

2.5 奇异函数-单位冲激偶



2.5 奇异函数

$$\frac{d}{dt}(x(t) * h(t)) = \frac{d}{dt} x(t) * h(t) = \frac{d}{dt} h(t) * x(t)$$

■ 冲激偶的性质

1、单位冲激偶 的面积为零

若考虑常数信号 $x(t)=1$, 可得

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d[x(t) * \delta(t)]}{dt} = x(t) * \delta'(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(\tau) d\tau \end{aligned}$$

2.5 奇异函数

■ 冲激偶的性质

$$2、 x(t)\delta'(t) \stackrel{?}{=} x(0)\delta'(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[x(t)\delta(t)] &= x'(t)\delta(t) + x(t)\delta'(t) \\ &= x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t)\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}[x(t)\delta(t)] = \frac{d}{dt}[x(0)\delta(t)] = x(0)\delta'(t)$$

$$x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

2.5 奇异函数

■ 冲激偶的性质

$$x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

$$t\delta'(t) = -\delta(t)$$

$$t^2\delta'(t) = 0$$

2.5 奇异函数

■ 冲激偶的性质

3、单位冲激偶是奇函数

$$x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta'(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)]dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(0)\delta'(t)]dt - \int_{-\infty}^{\infty} [x'(0)\delta(t)]dt \\ &= -x'(0)\end{aligned}$$

2.5 奇异函数

■ 冲激偶的性质

3、单位冲激偶是奇函数

若 $x(t)$ 是奇函数, 即 $x(t) = -x(-t)$, 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta'(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) \delta'(t) dt$$

通过变量代换 $-t = \tau$, 则上式右边可改写为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta'(t) dt &= - \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta'(-\tau) d(-\tau) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} [x(0) \delta'(-\tau) - x'(0) \delta(-\tau)] d(-\tau) = x'(0) \end{aligned}$$

2.5 奇异函数

■ 冲激偶的性质

3、单位冲激偶是奇函数

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta'(t) dt = -x'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta'(t) dt = -\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta'(-\tau) d(-\tau)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta'(-\tau) d(\tau) = x'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta'(t) dt = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta'(-t) dt$$

2.5 奇异函数

■ 奇异函数族

$$u(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \delta(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \delta'(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \delta''(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \delta^{(3)}(t) \cdots$$

$$u_{-1}(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} u_0(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} u_1(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \cdots \xrightarrow{\frac{d}{dt}} u_k(t)$$

$$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} u(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \cdots \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{1}{2} t^2 u(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} t u(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} u(t)$$

$$u_{-k}(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \cdots \xrightarrow{\frac{d}{dt}} u_{-2}(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} u_{-1}(t)$$

2.5 奇异函数

■ 奇异函数族

$$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} u(t)$$

$$\frac{d}{dt}(x(t) * h(t)) = \frac{d}{dt} x(t) * h(t) = \frac{d}{dt} h(t) * x(t)$$

$$\frac{d}{dt}(x(t) * h(t)) = x^{(1)}(t) * h(t) = h^{(1)}(t) * x(t)$$

$$\frac{d^k}{dt^k}(x(t) * h(t)) = x^{(k)}(t) * h(t) = h^{(k)}(t) * x(t) = h^{(k-i)}(t) * x^{(i)}(t)$$

2.5 奇异函数

■ 奇异函数族

$$\frac{d}{dt}(x(t) * \delta(t)) = x(t) * \delta'(t) = x(t) * u_1(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x(t) * \delta(t)) = x(t) * u_2(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta(t) * \delta(t)) = \delta(t) * u_2(t) = u_2(t) = u_1(t) * u_1(t)$$

$$\frac{d^k}{dt^k}(x(t) * \delta(t)) = x(t) * u_k(t) = x(t) * \underbrace{u_1(t) * \cdots * u_1(t)}_k$$

2.5 奇异函数

■ 奇异函数族

$$\delta(t) = u_0(t) \quad u(t) = u_{-1}(t) \quad \delta'(t) = u_1(t)$$

$$u_1(t) * u_{-1}(t) = u_0(t)$$

$$\vdots$$

$$u_k(t) * u_r(t) = u_{k+r}(t)$$

2.6 小结

1 信号的时域分解:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

2 LTI系统的时域分析——卷积和与卷积积分

3. LTI系统的特性与 $h(t)$ 、 $h(n)$ 的关系:

- 记忆性、因果性、稳定性、可逆性与 $h(t)$ 、 $h(n)$ 的关系:

2.6 小结

3. LTI系统的特性与 $h(t)$ 、 $h(n)$ 的关系:

2. 系统级联、并联时, $h(t)$ 、 $h(n)$ 与各子系统的关系。

4. 奇异函数

已知某系统对激励 $x(t)$ 的零状态响应： $y(t) = \int_{t-2}^{\infty} e^{t-\tau} x(\tau-1) d\tau$ 。试求该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

一LTI系统, $x(t)$ 为输入, $y(t)$ 为输出:

若 $y(0_-) = 12, y'(0_-) = -23, x(t) = u(t)$, 则 $y(t) = (3e^{-t} + 4e^{-2t})u(t)$;

若 $y(0_-) = 12, y'(0_-) = -23, x(t) = 2u(t)$, 则 $y(t) = (5e^{-t} - 3e^{-2t})u(t)$;

计算下面两种情况下的输出。

(a) $y(0_-) = 12, y'(0_-) = -23, x(t) = 0$ 。

(b) $y(0_-) = 12, y'(0_-) = -23, x(t)$ 如图所示。

