

课堂教学：32学时

考核方式：

考核项	比例	类型	评价方法
智慧树线上课程	10%	线上	系统自动给分
线上练习	20%	线上	系统自动给分
作业	10%	线上	教师批改
期末闭卷考试	60%	线下	流水阅卷

信号与系统

Signals and Systems

课程位置

教材

主要内容

课程特点

学习方法

参考书

课程位置

先修课

《高等数学》

《复变函数》

《线性代数》

《电路分析基础》

后续课程

《数字信号处理》

《通信原理》

《图像处理》

本课程为通信、电子类学生重要的专业基础课。

主要内容

本课程研究**确定性**信号经线性时不变系统传输与处理的基本概念与基本分析方法：

学习确定性信号的描述、建模与分析方法，理解傅里叶频谱分析的思想，建立频谱的概念；掌握连续时间信号与离散时间信号的各种描述模型；掌握有关系统的稳定性、频响、因果性等工程应用中的一些重要概念与结论，从时间域到变换域。

掌握线性时不变系统时域和频域的分析方法；掌握连续和离散信号问题的理解、分析与处理方法；掌握连续和离散时间系统问题的理解、分析与处理方法。

从输入、输出描述入手。以通信和控制工程为主要应用背景，注重实例分析。

课程特点

- 与《电路分析》比较，更抽象，更一般化；
- 应用**数学知识**较多，用数学工具分析物理概念；
- 常用数学工具：
 - 微分、积分(定积分、无穷积分、变上限积分)
 - 线性代数
 - 微分方程
 - 傅里叶级数、傅里叶变换、拉氏变换
 - 差分方程求解， Z 变换

学习方法

- 重视物理概念与数学分析之间的对照；
- 注意分析结果的物理解释，注意各参量变动时的物理意义及其作用；
- 同一问题可有多种解法，应寻找最简单、最合理的解法，比较各方法之优劣；
- 及时复习、完成作业。

参考书目

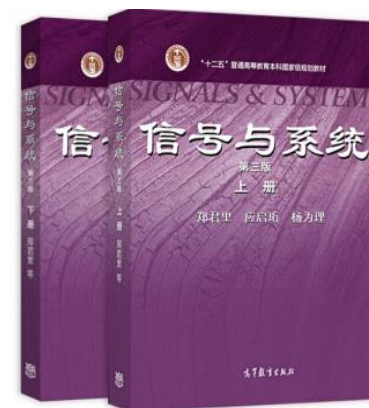
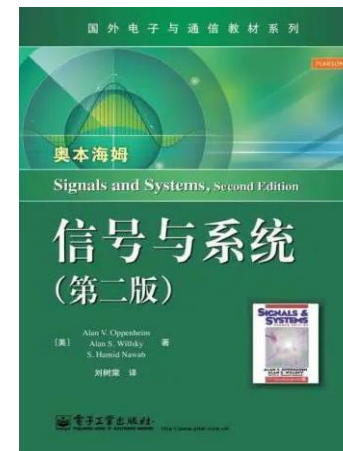
(1) 吴大正 . **信号与线性系统分析** . 北京 . 高等教育出版社;

(2) 郑君里, 应启珩, 杨为理. **信号与系统**. 北京: 高等教育出版社;

(3) 管致中等 . **信号与线性系统** . 北京 . 高等教育出版社;

(4) 奥本海姆, 信号与系统, 刘树棠译. 西安交通大学出版社

在线学习网址: <https://www.icourse163.org>



第1章 信号与系统

1.1 信号与系统

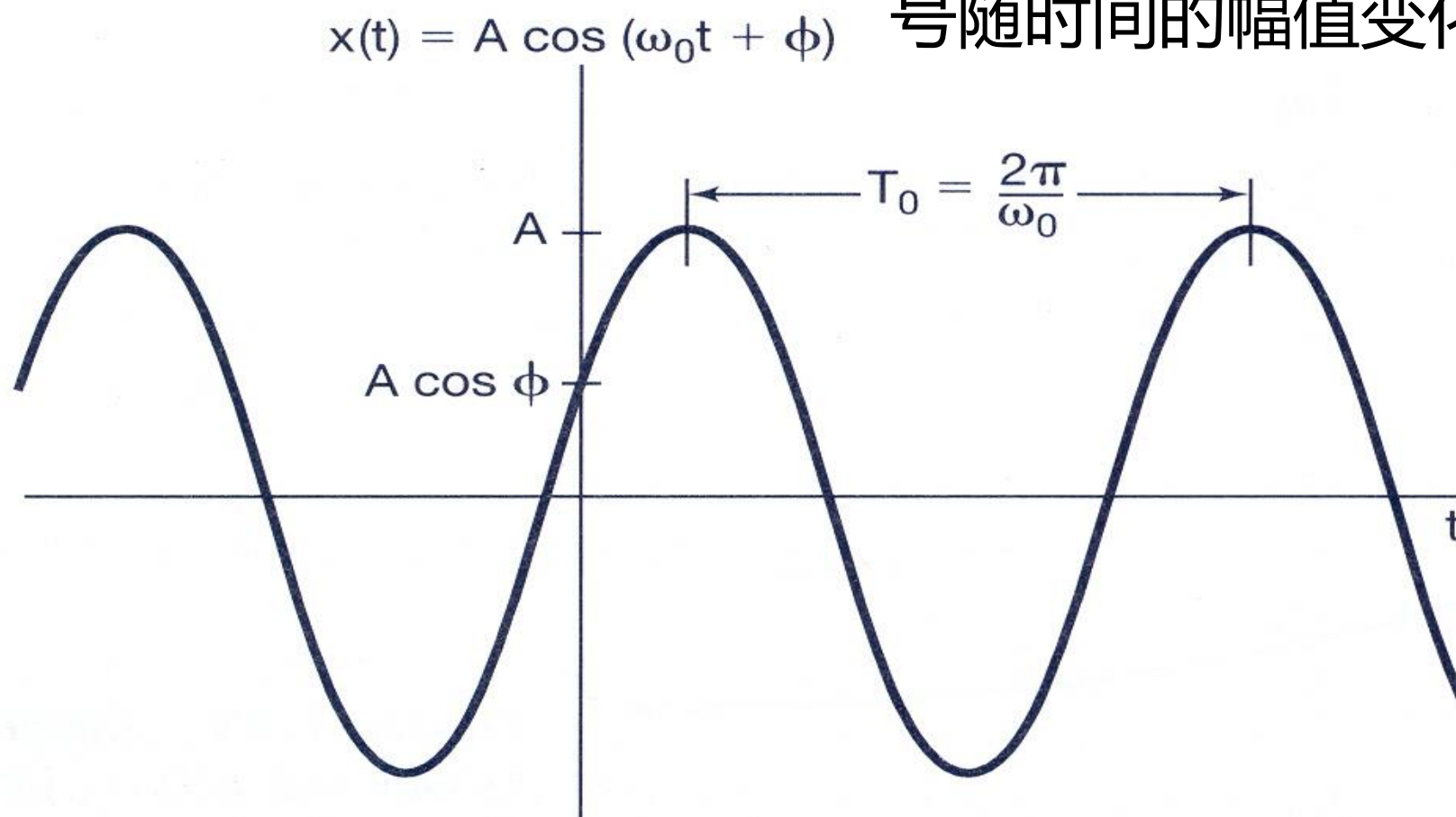
□ 信号的定义

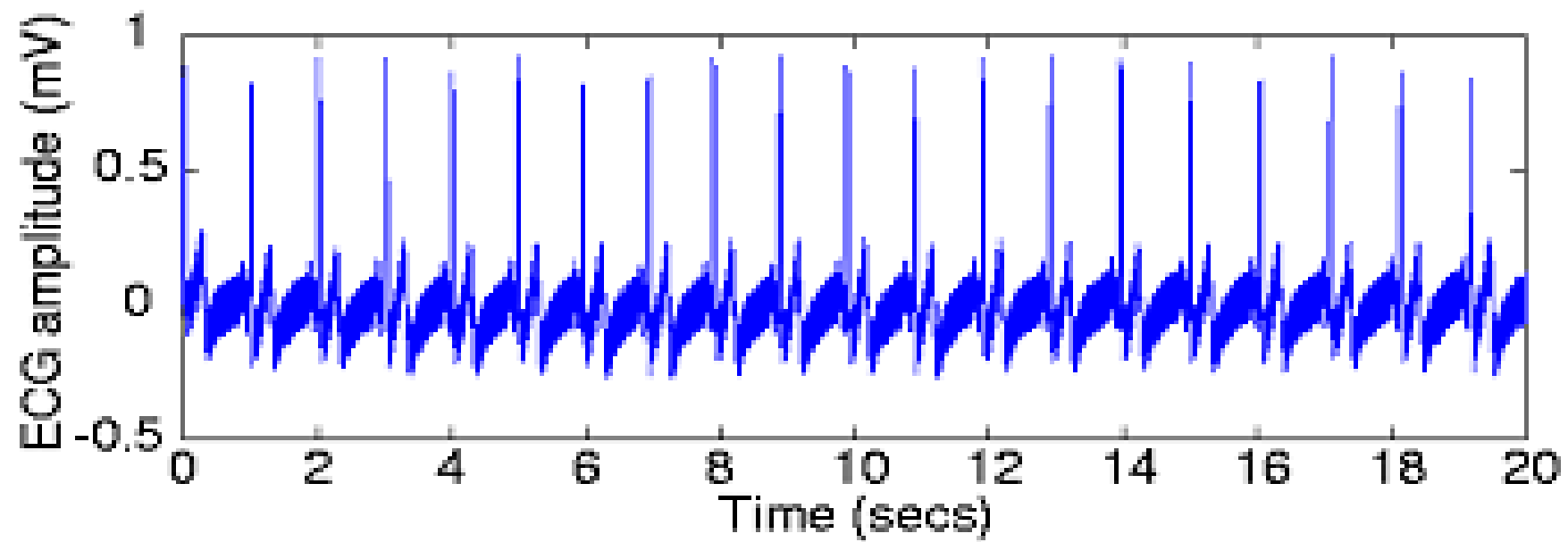
□ 信号：信息的物理表现形式（任何承载信息的事物都可以看作一个信号，信号是信息的物理表现）。

- 信号载体的物理特征，可分为：电、磁、光、机械、热、声音等；一些社会科学研究信号则以统计数据为载体（如价格，经济指数，股市指数等）。

物理信号的自变量有多种，可以是时间、距离、温度、位置等，本课程一般把信号看做时间的函数

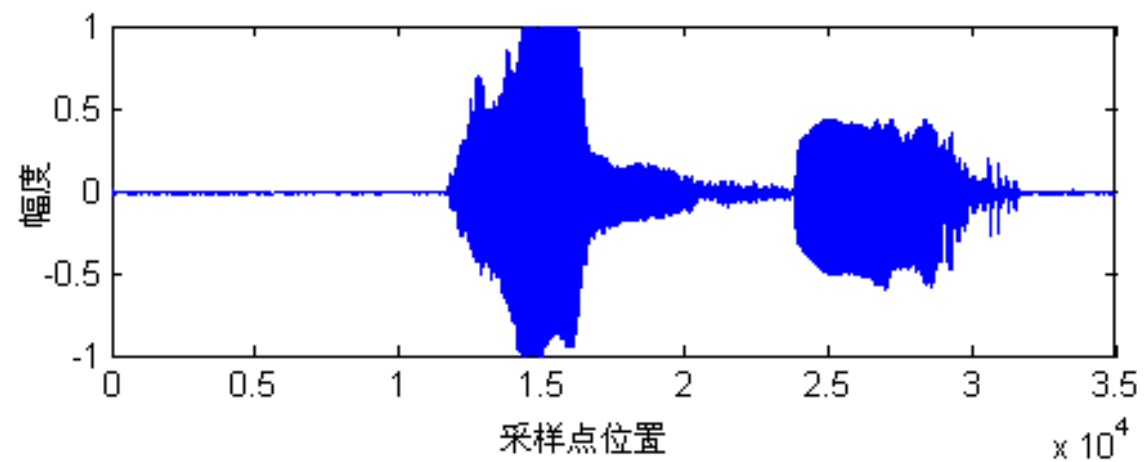
横轴表示时间， $x(t)$ 则表示信号随时间的幅值变化





心电图信号

声音信号：



汉语“用户”一词的时域波形

图像信号：



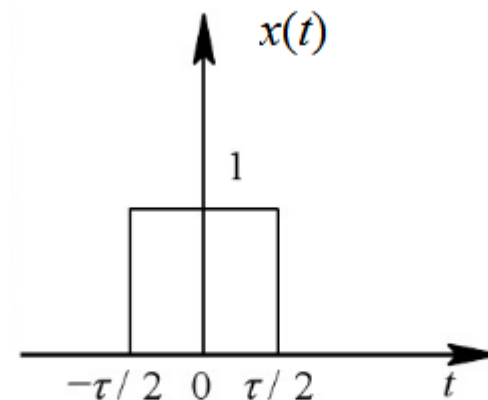
灰度和彩色图像

□ 信号的特性

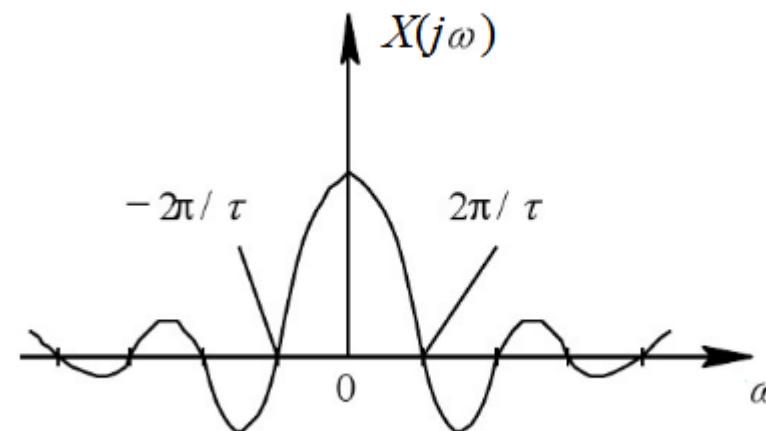
✓ 时域：波形、幅度、相位

✓ 频域：振幅频谱和相位频谱

时域与频域信号表现形式不同，但包含的信息是相同的

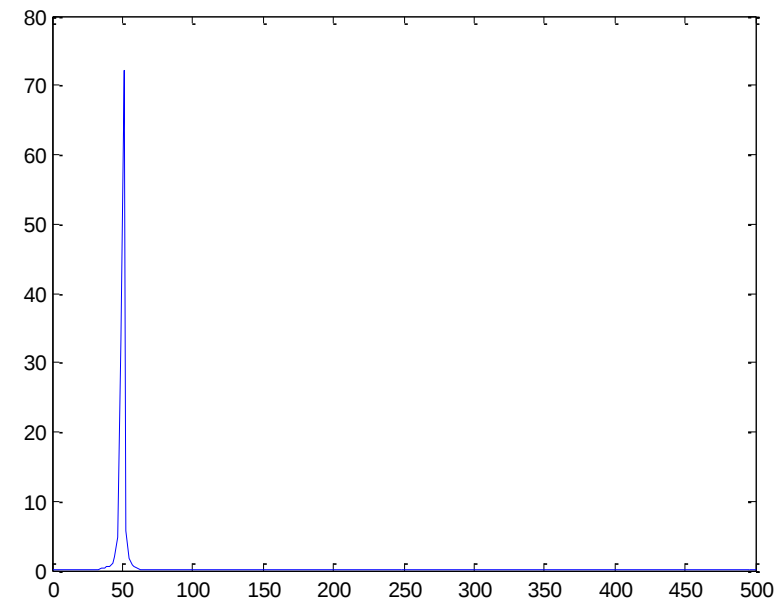
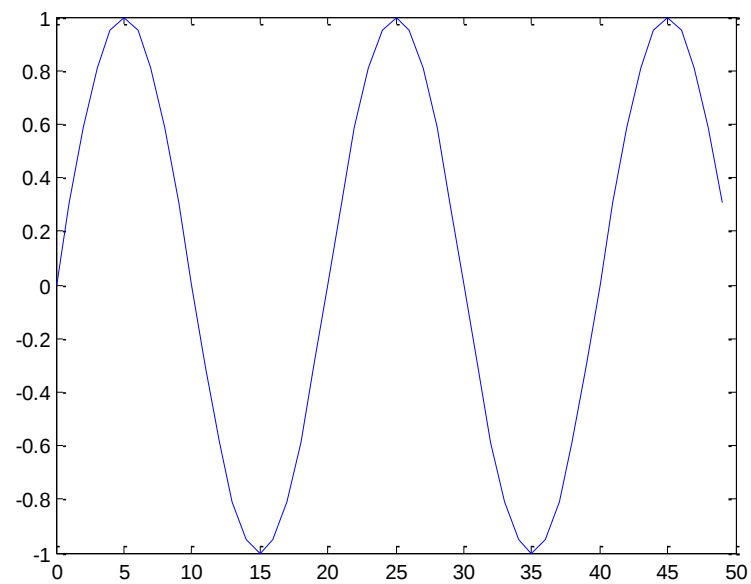


(a)



(b)

□ 信号的特性



□ 信号类别：根据物理量的不同，信号存在多种形式

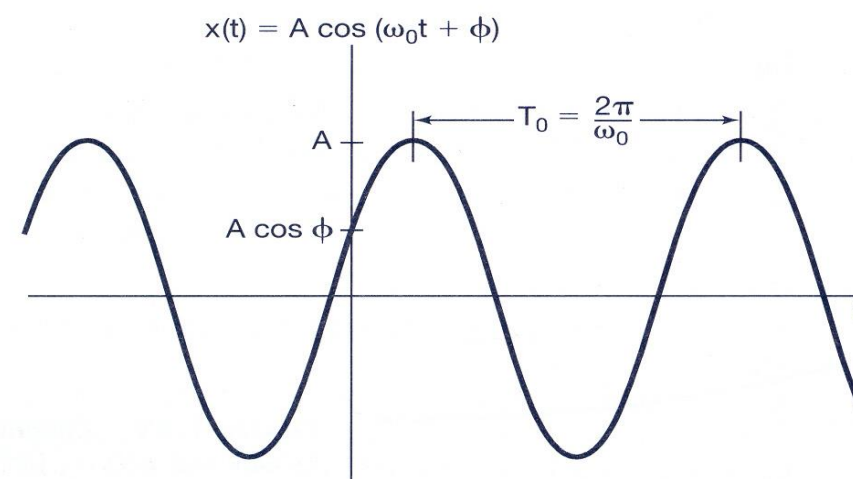
确定信号/随机信号

周期信号/非周期信号

能量信号/功率信号

一维信号与多维信号

连续时间信号/离散时间信号/数字信号



一维信号与多维信号

一维信号：如语言和音乐等，自变量多数是以时间 t 或频率 f 表示；

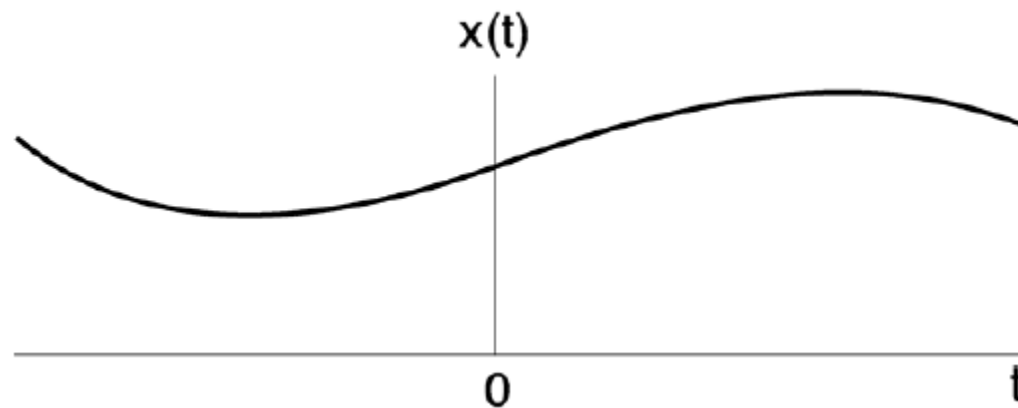
二维信号：如照片或地形图等，以空间的 x, y 坐标为自变量；

多维信号：信号是多个（例如 M 个， $M \geq 2$ ）自变量的函数，如流媒体电视信号 (x, y, t) 、大气中的温度分布（经度、纬度、高度、时间）；

若信号表示成 M 维的矢量， $x=[x_1(n), x_2(n), \dots, x_M(n)]'$ ，则称 x 是一个 M 维的矢量信号。

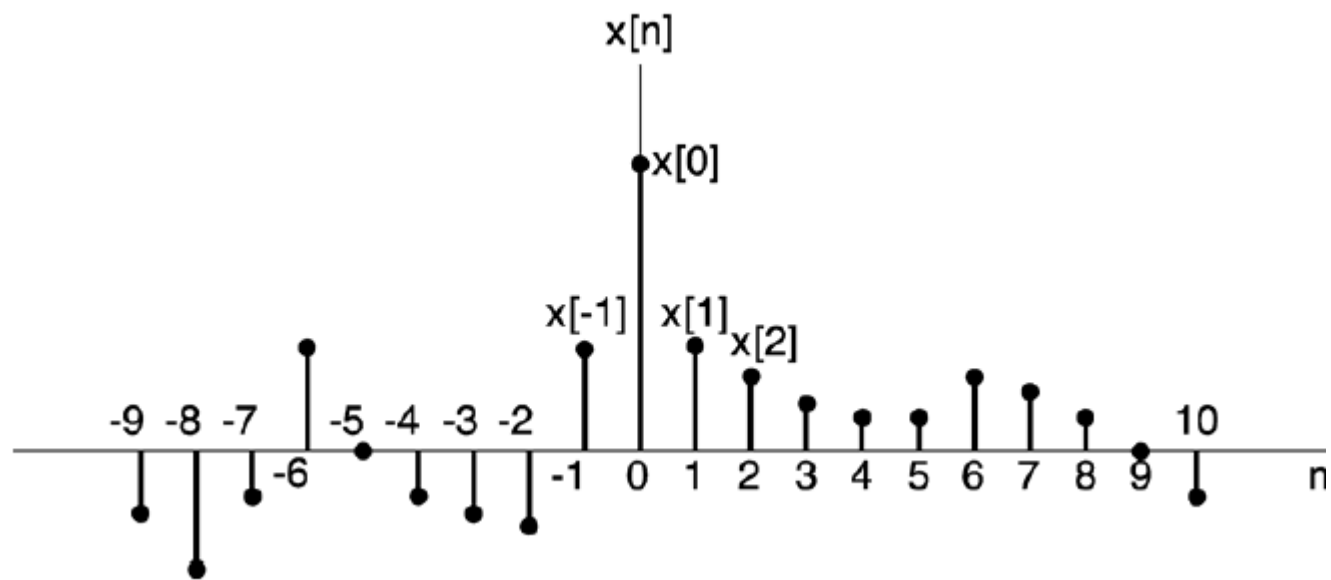
□ 连续信号continuous time, 也可称为模拟 (analog) 信号, 存在范围内除有限个间断点外所有瞬时均有确定值。

- ✓ 电流
- ✓ 电压
- ✓ 压力
- ✓ 温度
- ✓ 流速



离散信号 (discrete time)：时间上不连续，幅度连续

离散信号经过幅度量化，时间和幅度均不连续，即为数字(digital)信号





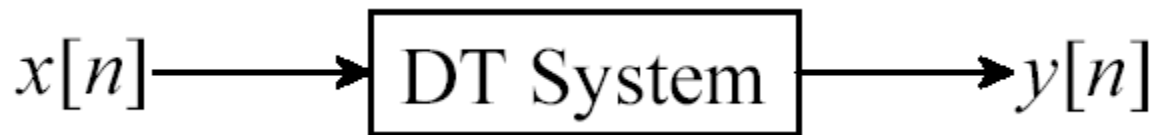
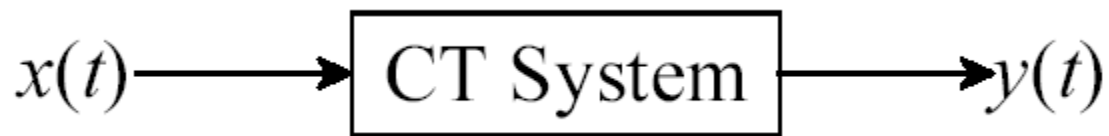
道琼斯股指变化



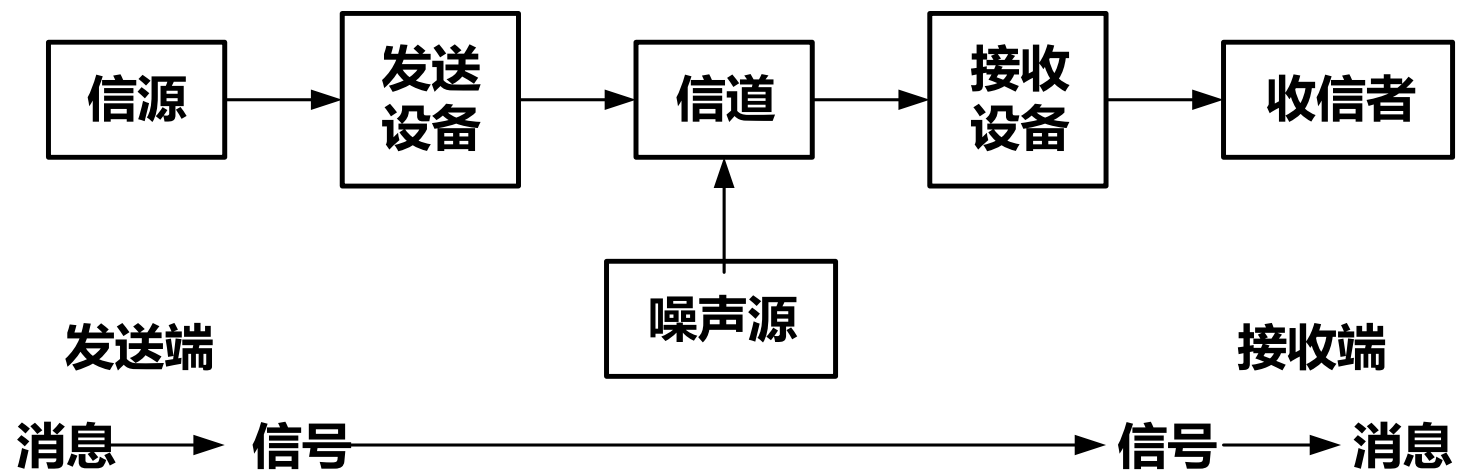
一幅黑白照片

□ 系统定义

- 系统（system）：由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的，具有特定功能的整体。如太阳系、控制系统、电力系统、经济系统、计算机系统等。
- 系统一般由物理器件构成，它在接收一个输入信号时会产生一个或者多个输出。输入叫激励，输出叫响应。



⑩ 系统例子：



通信系统：为传送消息而装设的全套技术设备

本课程研究对象

信号：确定性一维信号

• 系统：线性时不变系统

信号分析



研究信号的基本特性

信号综合



根据要求设计和
产生需要的信号

系统分析



研究系统的基本特性

系统综合



在给定条件下
设计需要的系统

□ 信号的能量和功率

连续时间信号在 $[t_1, t_2]$ 区间的能量定义为:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

连续时间信号在 $[t_1, t_2]$ 区间的平均功率定义为:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

□ 信号的能量和功率

离散时间信号在 $[n_1, n_2]$ 区间的能量定义为

$$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

离散时间信号在 $[n_1, n_2]$ 区间的平均功率为

$$P = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

□ 信号的能量和功率

在无限区间上也可以定义信号的总能量：

- 连续时间情况下：

$$E_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- 离散时间情况下：

$$E_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N |x[n]|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

□ 信号的能量和功率

在无限区间内的平均功率可定义为：

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N |x[n]|^2$$

□ 信号的能量和功率

1. 能量信号——信号具有有限的总能量，即：

$$E_{\infty} < \infty, \quad P_{\infty} = 0$$

2. 功率信号——信号有无限的总能量，但平均功率有限。即：

$$E_{\infty} = \infty, \quad 0 < P_{\infty} < \infty$$

3. 信号的总能量和平均功率都是无限的。即：

$$E_{\infty} = \infty, \quad P_{\infty} = \infty$$

练习：判断下列信号是能量信号、功率信号，或是其他。

1. $x(t) = e^{-t}, \quad 0 < t < \infty$

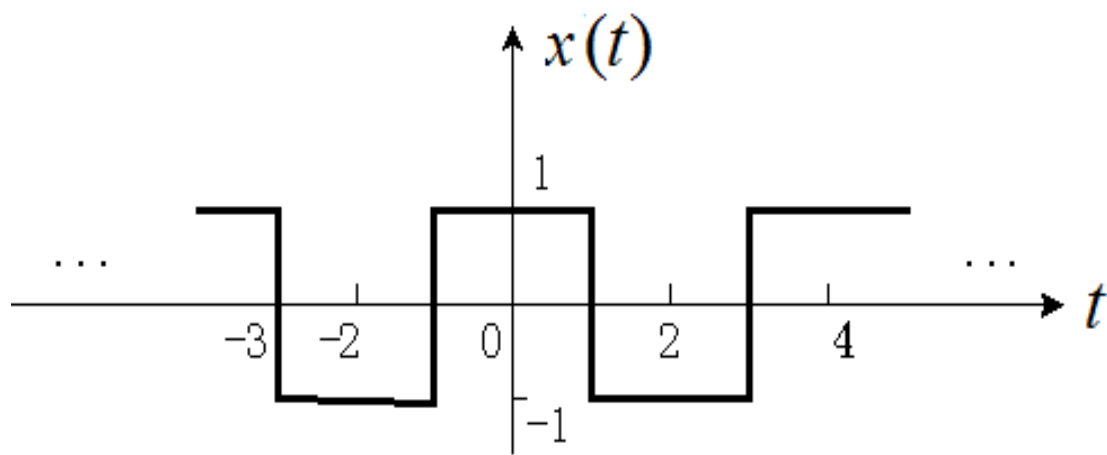
2. $x(t) = \cos(2t)$

3. $x[n] = n, \quad 0 \leq n < \infty$

4. $x(t) = 3t, \quad 9 < t < \infty$

□ 连续时间周期信号

$$x(t + T) = x(t)$$



连续的周期信号

$$x(t + T) = x(t)$$

最小的 T 称为基波周期

□ 连续时间周期信号

例1: 确定以下信号是否为周期信号?

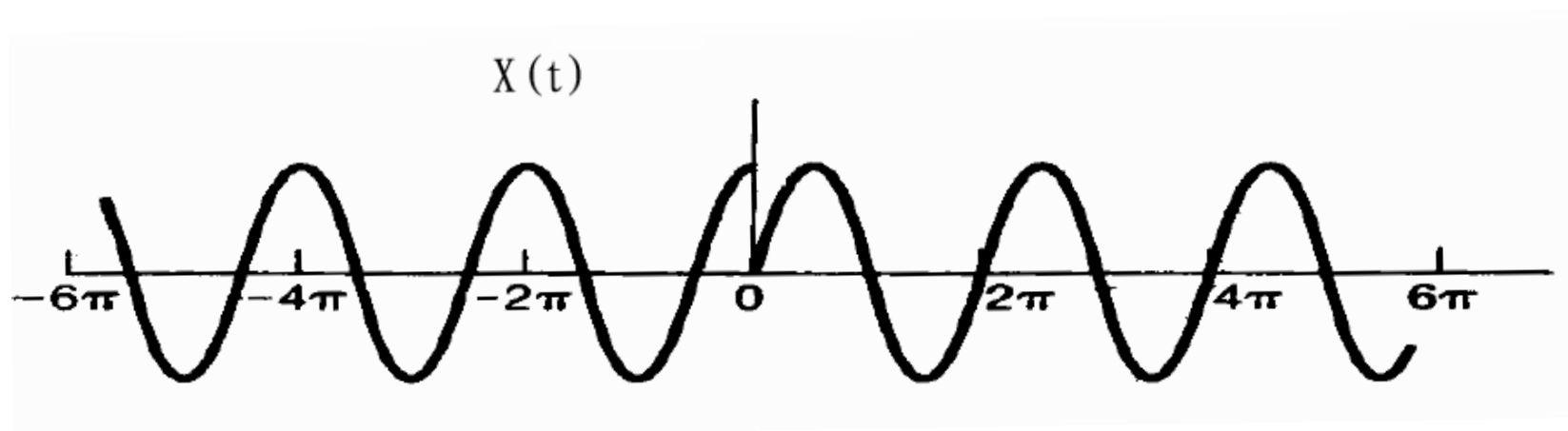
$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{如果 } t < 0 \\ \sin(t) & \text{如果 } t \geq 0 \end{cases}$$

解:

因为 $\cos(t+2\pi) = \cos(t)$

$$\sin(t+2\pi) = \sin(t)$$

$x(t)$ 在 $t=0$ 处有一个不连续点, 该点不是重复出现的, 因此不是周期信号。



□ 连续时间周期信号

例2: 判断下列信号是否为周期信号? 若是周期信号, 则周期为多大?

$$x(t) = \cos 2t + \sin 3t$$

解: 若是周期信号, 则应满足

$$x_1(t) = x_1(t + m_1 T_1)$$

$$m_1 = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$x_2(t) = x_2(t + m_2 T_2)$$

$$m_2 = 0, 1, 2, 3 \dots$$

而对信号 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, 只有当 $T = m_1 T_1 = m_2 T_2$ 时, $x(t)$ 才是周期的。

□ 连续时间周期信号

$$\cos \omega t \quad T = 2m\pi / \omega$$

$$\cos 2t \quad T_1 = 2m_1\pi / 2 = m_1\pi$$

$$\sin 3t \quad T_2 = 2m_2\pi / 3$$

结论: $x(t)$ 信号是周期的, 周期为 2π 。

□ 连续时间周期信号

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3n)^2}$$

若是周期的, 则有 $x(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t+T-3n)^2}$

设 $T=3k$, 则 $x(t+3k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-[t-3(n-k)]^2}$

改变求和的范围 $m = n - k$
 $x(t+3k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3m)^2} = x(t)$

所以, 它是基波周期为, $T_0 = 3$

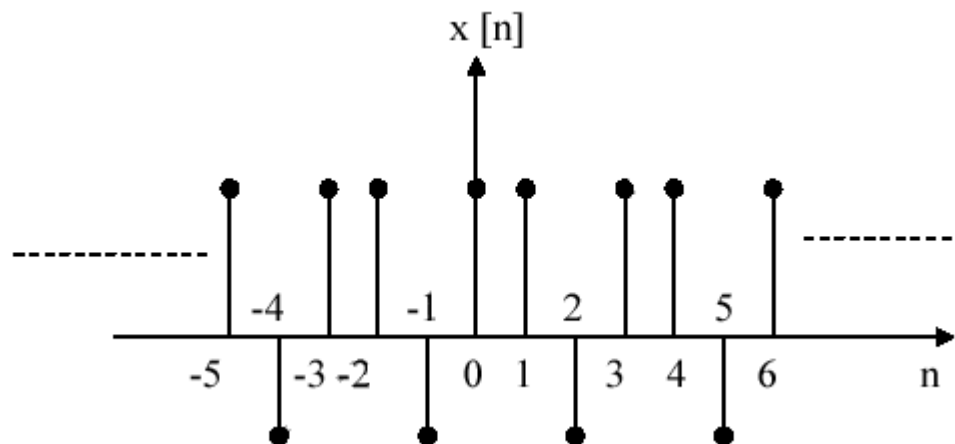
离散信号 $f(n)$ 周期为多少？

$$f(n) = \cos(n\pi) + \cos\left(\frac{8}{3}n\pi\right) + \cos\left(\frac{11}{5}n\pi\right)$$

□ 离散时间周期信号

$$x[n] = x[n + N]$$

N 为正整数



满足此关系的正实数（正整数）中最小的一个，称为信号的基波周期。 N_0

□ 奇信号和偶信号

如果有 $x(-t) = x(t)$
 $x[n] = x[-n]$ 则称该信号是偶信号。

如果有 $x(-t) = -x(t)$
 $x[-n] = -x[n]$ 则称该信号是奇信号。

奇信号在 $t=0$ 或 $n=0$ 时, 一定为零。

□ 奇信号和偶信号

任何信号都能分解成一个偶信号与一个奇信号之和。

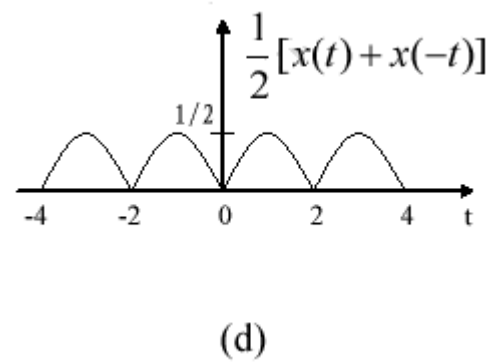
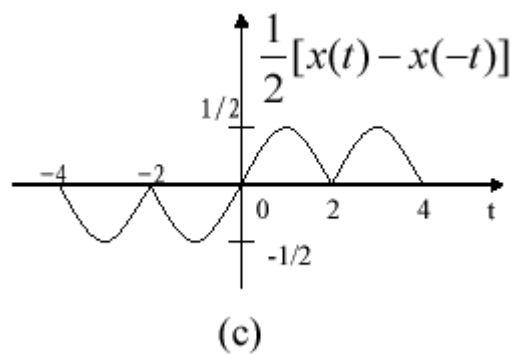
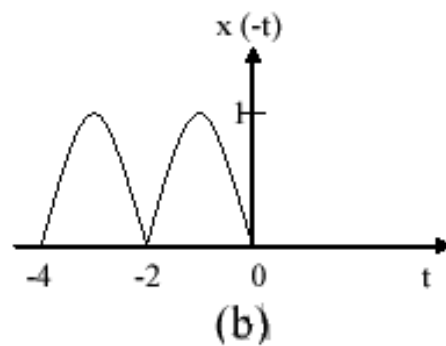
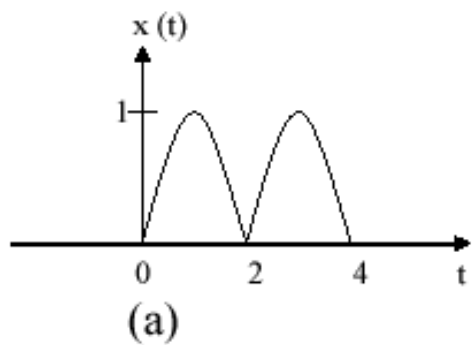
$$x(t) = \varepsilon_v(t) + O_d(t)$$

$$\varepsilon_v(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad O_d(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

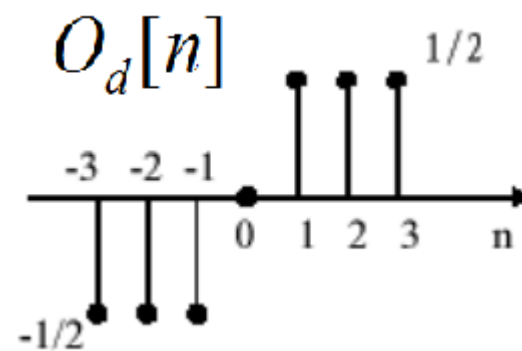
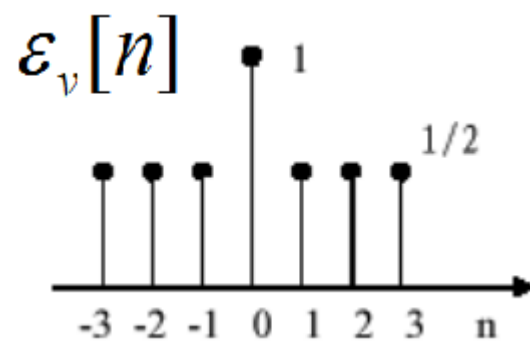
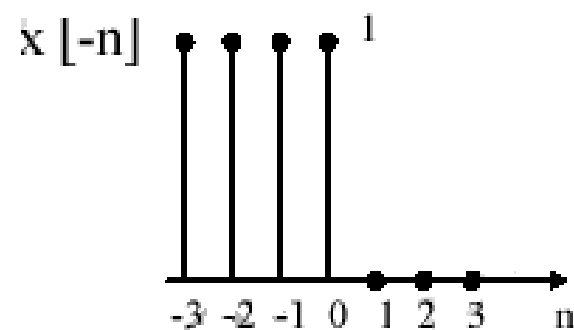
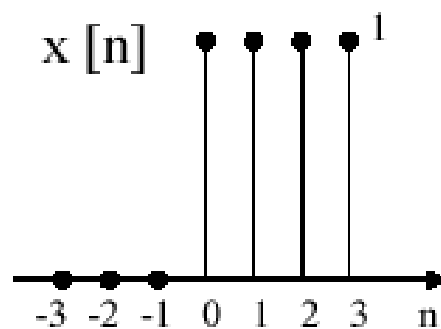
$$x[n] = \varepsilon_v[n] + O_d[n]$$

$$\varepsilon_v[n] = 1/2(x[n] + x[-n]) \quad O_d[n] = 1/2(x[n] - x[-n])$$

□ 奇信号和偶信号



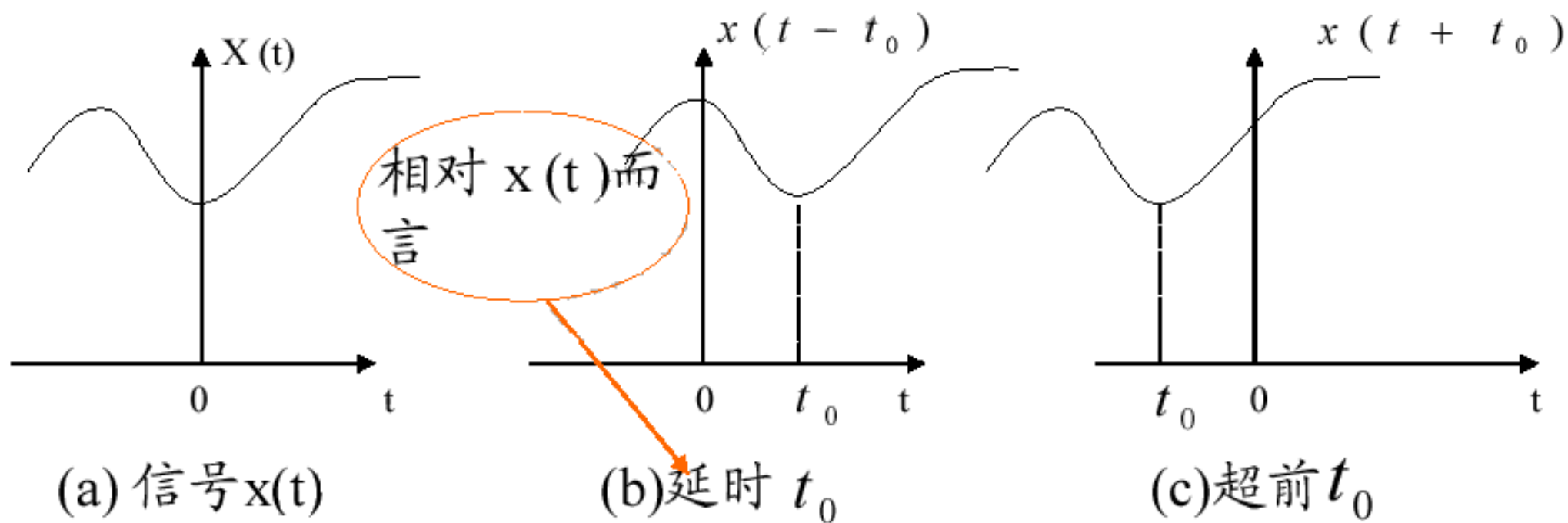
□ 奇信号和偶信号



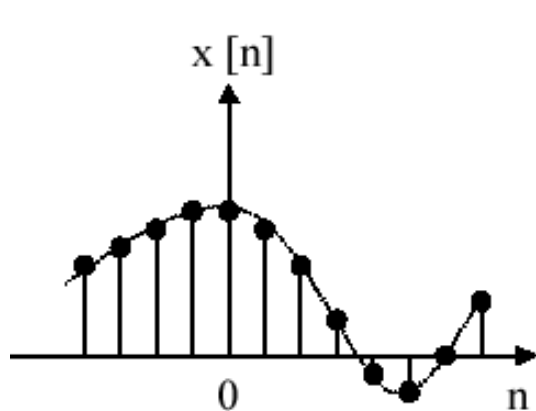
信号的基本运算与独立变量的变换

1. 信号的时移 (移位)
2. 信号的反转 (反褶)
3. 信号的展缩 (尺度变换)
4. 一般情况

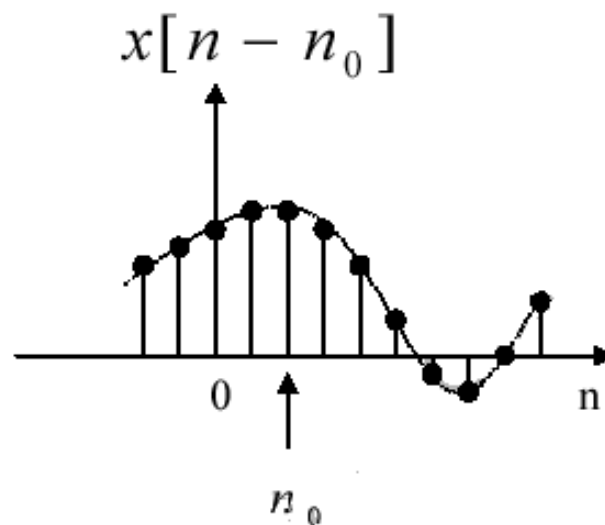
■ 时移：信号的波形沿x轴左右平行移动，形状不变



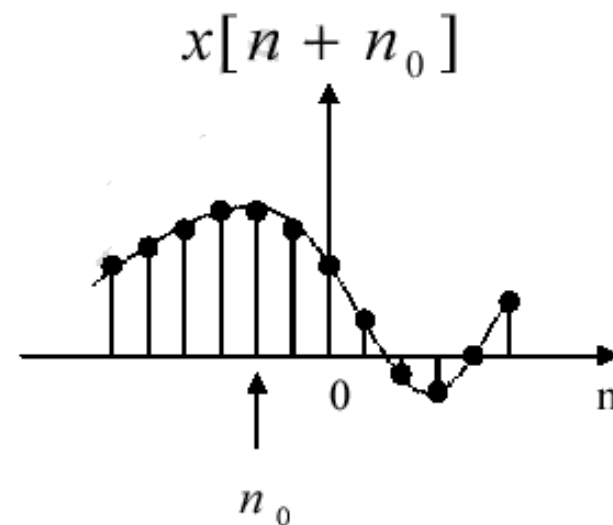
□ 时移：信号的波形沿x轴左右平行移动，形状不变



(a) 信号 $x[n]$



(b) 延时 n_0



(c) 超前 n_0

□ 时移：信号的波形沿x轴左右平行移动，形状不变

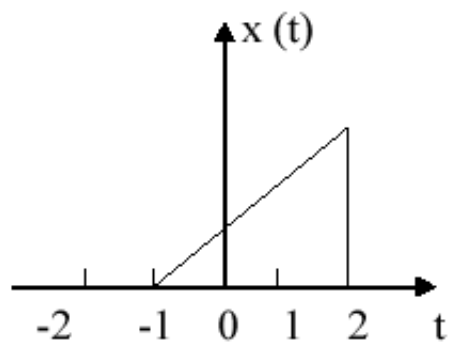
$x(t) \longrightarrow x(t - t_0)$ 当 $t_0 > 0$ 时，信号向右平移 t_0

$t_0 < 0$ 时，信号向左平移 $|t_0|$

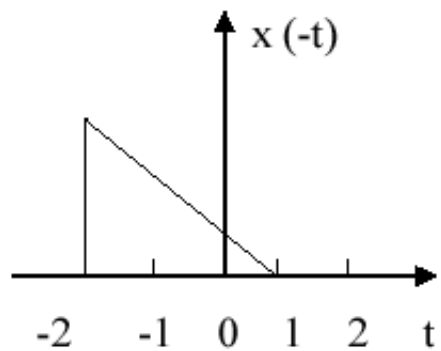
$x[n] \longrightarrow x[n - n_0]$ 当 $n_0 > 0$ 时，信号向右平移 n_0

$n_0 < 0$ 时，信号向左平移 $|n_0|$

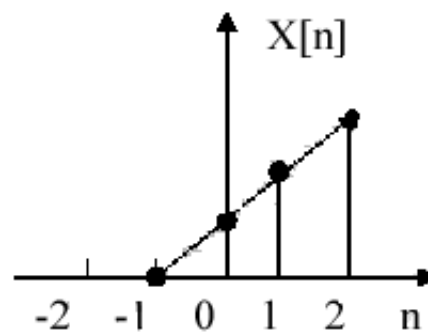
□ 反转：信号以纵轴为轴翻转180度。



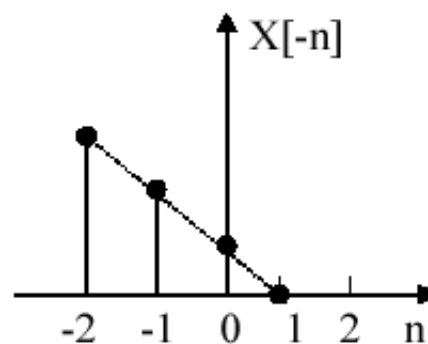
(a)



(b)



(a)



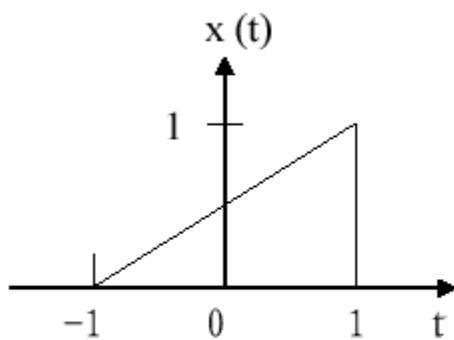
(b)

□ 反转：信号以纵轴为轴翻转180度。

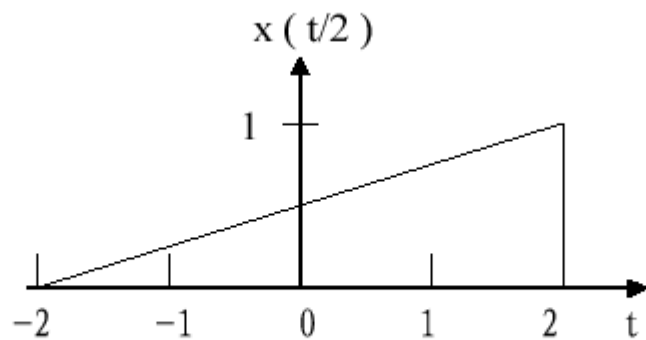
$x(t) \longrightarrow x(-t)$ 信号以 $t = 0$ 为轴呈镜像对称。

$x[n] \longrightarrow x[-n]$ 与连续时间的情况相同。

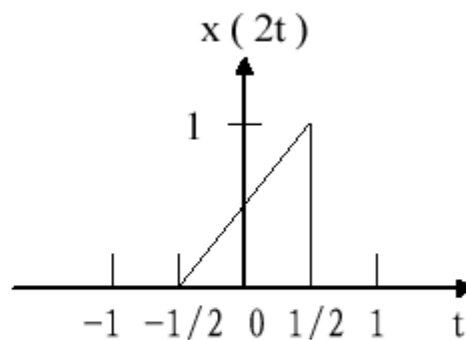
□ 尺度变换：波形的压缩与扩展。



(a)

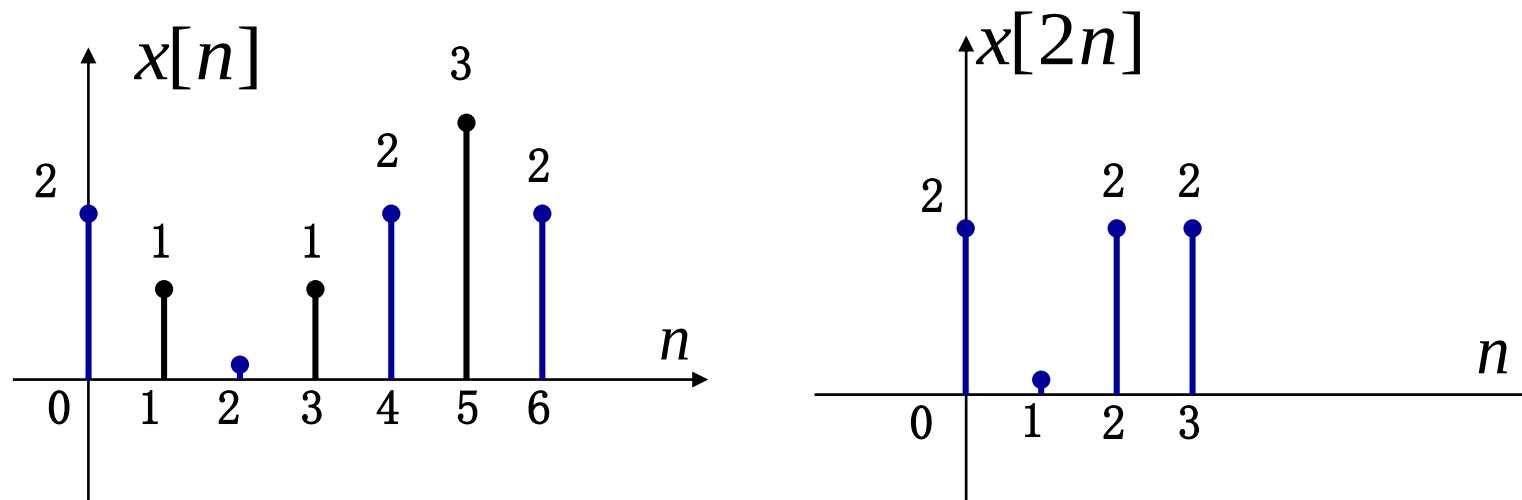


(b)



(c)

□ 尺度变换：波形的压缩与扩展。

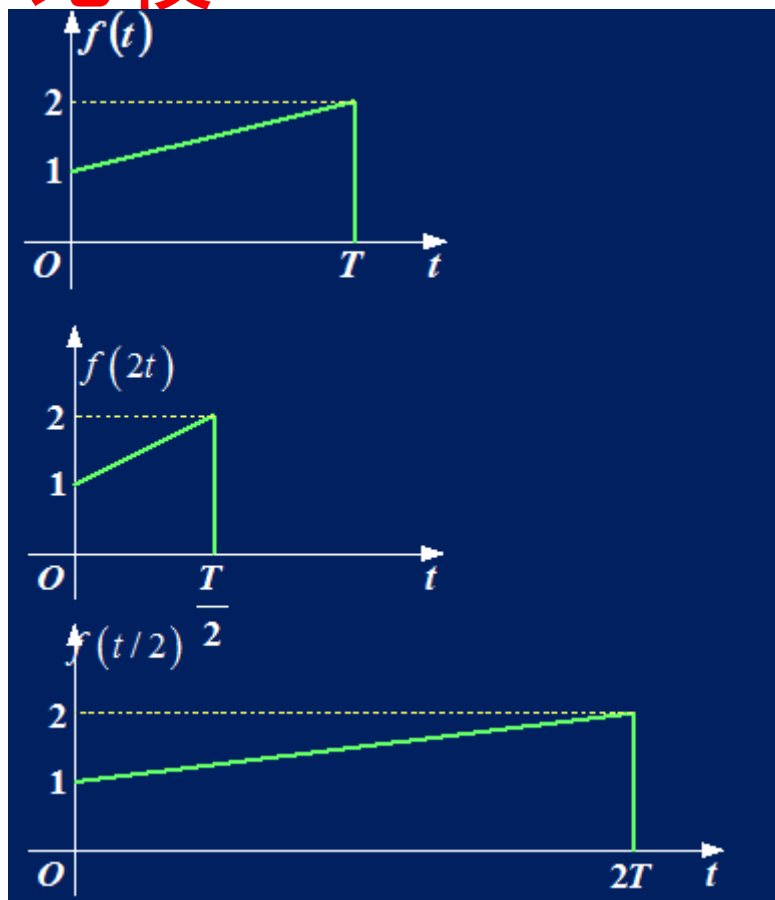


$$x(t) \longrightarrow x(at)$$

$a > 1$ 时, $x(at)$ 是将 $x(t)$ 在时间上压缩 a 倍,

$0 < a < 1$ 时, $x(at)$ 是将 $x(t)$ 在时间上扩展 $1/a$ 倍。

比较



- 三个波形相似，都是 t 的一次函数。
- 但由于自变量 t 的系数不同，则达到同样函数值2的时间不同。
- 时间变量乘以一个系数等于改变观察时间的标度。

$$f(t) \rightarrow f(at) \begin{cases} a > 1 & \text{压缩, 保持信号的时间缩短} \\ 0 < a < 1 & \text{扩展, 保持信号的时间增长} \end{cases}$$

一般情况：

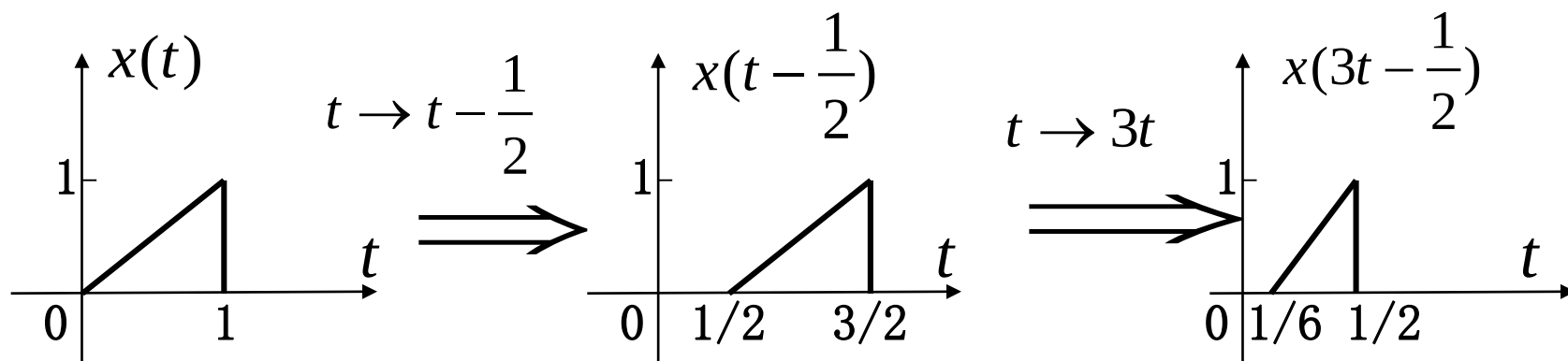
$$x(t) \rightarrow x(at \pm b) = x[a(t \pm b/a)] \quad (\text{设 } a > 0)$$

方法：

$$x(t) \rightarrow x(t \pm b) \rightarrow x(|a|t \pm b) \rightarrow x(at \pm b)$$

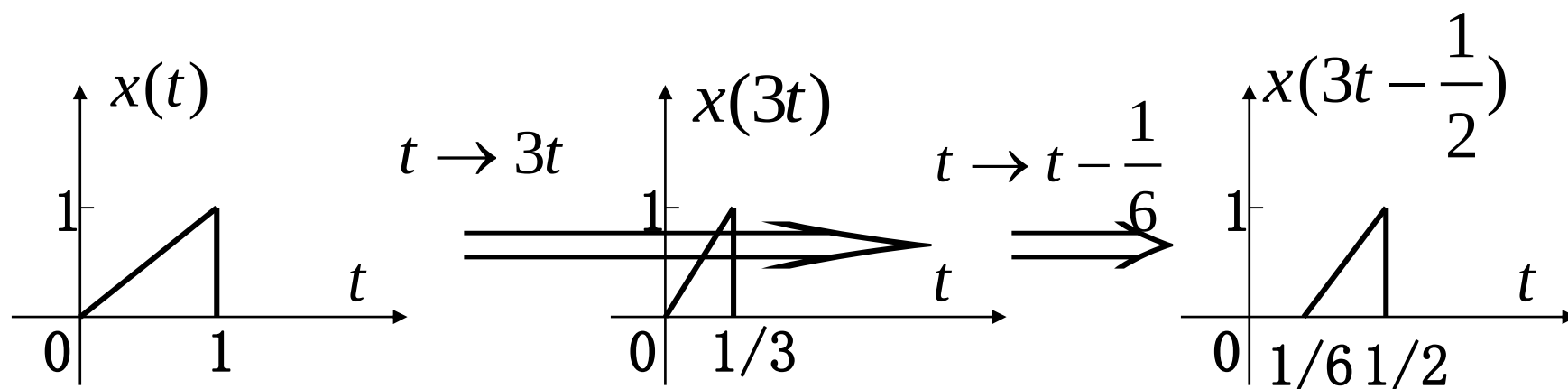
综合示例： 由 $x(t) \Rightarrow x(3t - \frac{1}{2})$

做法一： $x(t) \rightarrow x(t - \frac{1}{2}) \rightarrow x(3t - \frac{1}{2})$



综合示例： 由 $x(t) \Rightarrow x(3t - \frac{1}{2})$

做法二： $x(t) \rightarrow x(3t) \rightarrow x(3t - \frac{1}{2})$



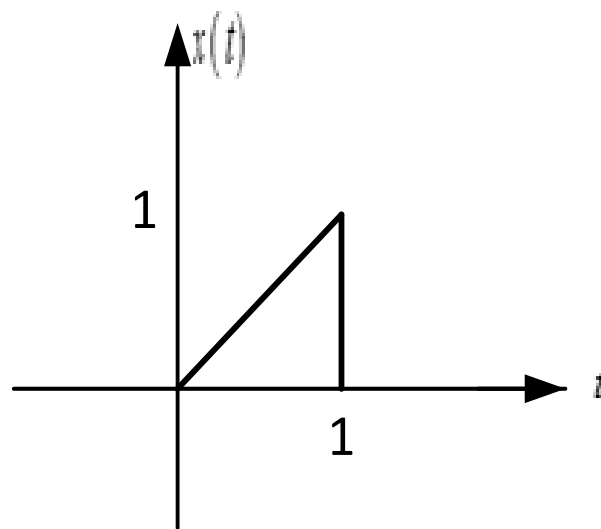
练习：

信号 $x(t)$ 如图所示，画出并标注下列信号：

1. $x(\frac{t}{2})$

2. $x'(t)$

3. $\varepsilon_v\{x(t) - x(t+1)\}$



离散时间序列的差分与累加：

离散时间序列的差分可分为前向差分和后向差分。一阶前向差分定义为

$$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n]$$

二阶前向差分为

$$\begin{aligned}\Delta^2 x[n] &= \Delta\{\Delta x[n]\} = \Delta\{x[n+1] - x[n]\} \\ &= x[n+2] - 2x[n+1] + x[n]\end{aligned}$$

高阶前向差分可以依上式类推得到。同理，一阶后向差分定义为

$$\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$$

二阶后向差分为

$$\begin{aligned}\nabla^2 x[n] &= \nabla\{\nabla x[n]\} = \nabla\{x[n] - x[n-1]\} \\ &= x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]\end{aligned}$$

离散时间序列的累加定义为

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m]$$

信号 $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ 如图 1 所示。

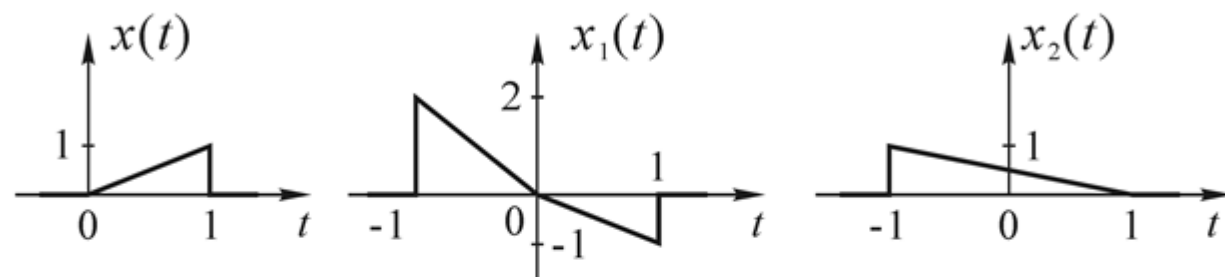


图 1

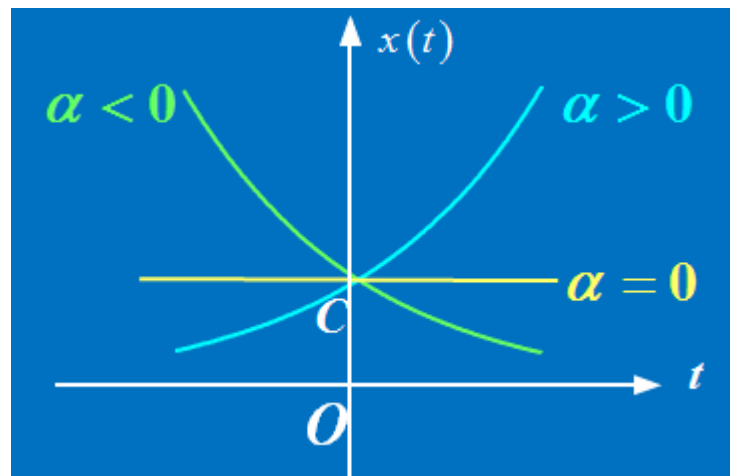
- (a) 写出用 $x(t)$ 表示 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 的表示式;
- (b) 画出 $x_3(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}$ 波形图;
- (c) 画出 $x(t)$ 的偶部 (分量) 与奇部 (分量) 波形图。

1.5 指数信号与正弦信号

□ 连续时间指数与正弦信号

$$x(t) = Ce^{at} \quad \text{乘除微分和积分之后仍是指数信号}$$

1. 实指数信号: C, a 为实数



2. 周期复指数信号与正弦信号:

$$x(t) = Ce^{at}$$

$$a = j\omega_0, \text{ 不失一般性取}$$

$$C = 1$$

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t \text{ 实部与虚部都是正弦信号。}$$

$$x(t) \text{ 显然是周期的, 其基波周期为: } T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

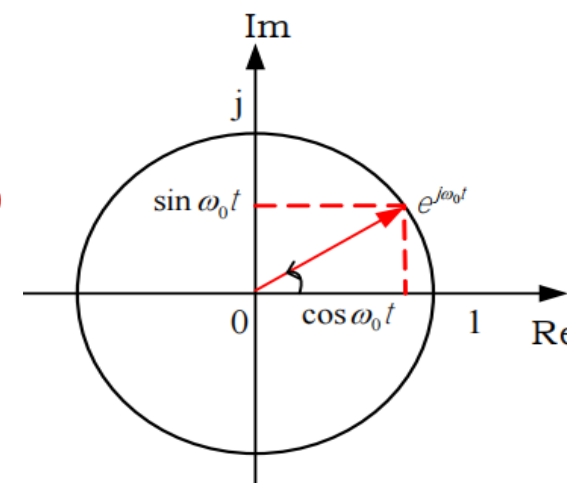
基波频率

欧拉 (Euler) 公式

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$



2. 周期复指数信号与正弦信号:

对 $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ 而言, 它在一个周期内的能量是

$$E_T = \int_0^{T_0} |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = \int_0^{T_0} 1 \cdot dt = T_0$$

它的平均功率为: $P_T = 1$

3. 成谐波关系的复指数信号集:

$$\phi_k(t) = \left\{ e^{jk\omega_0 t} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

该信号集中的每个信号都是周期的，它们的频率分别为 $k\omega_0$ ，都是 ω_0 的整数倍，因而称它们是成谐波关系的。

4. 一般复指数信号:

$$x(t) = Ce^{at}$$

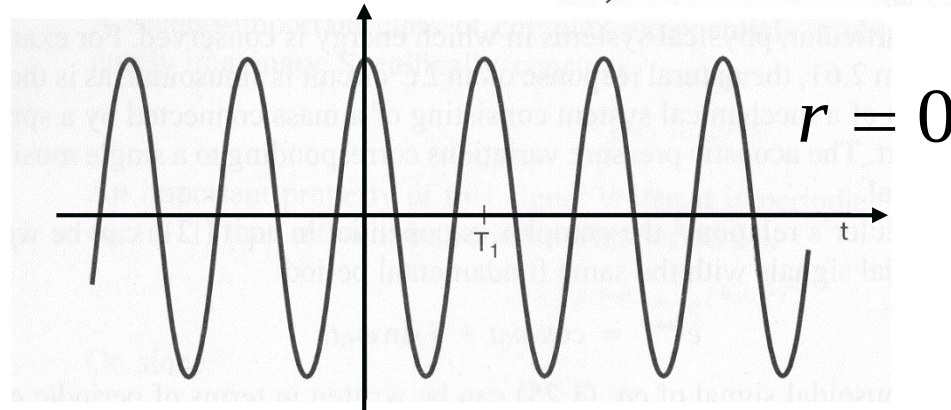
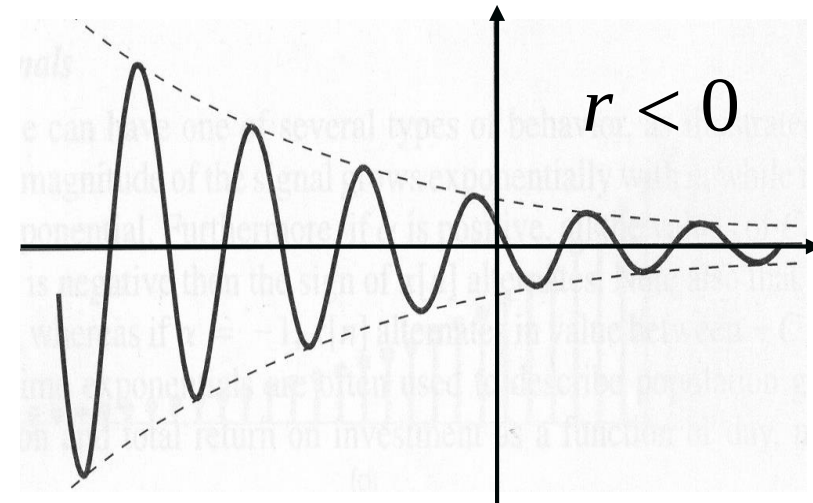
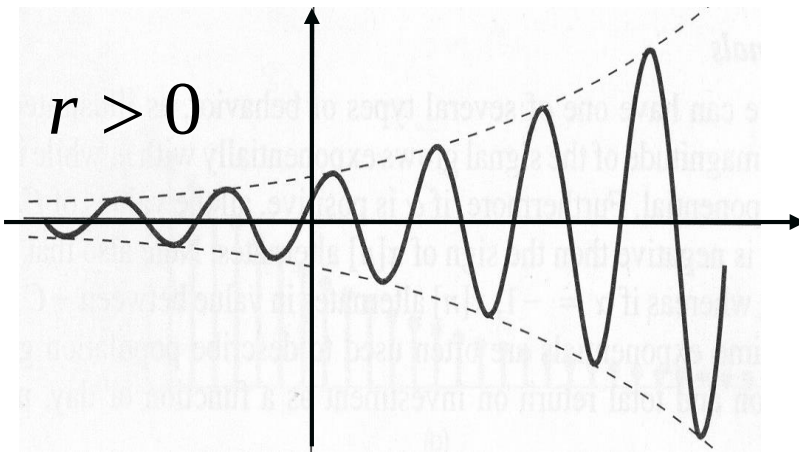
令 $C = |C|e^{j\theta}$ $a = r + j\omega_0$
则

$$\begin{aligned} x(t) &= |C|e^{j\theta}e^{rt}e^{j\omega_0 t} = |C|e^{rt}e^{j(\omega_0 t + \theta)} \\ &= |C|e^{rt}[\cos(\omega_0 t + \theta) + j\sin(\omega_0 t + \theta)] \end{aligned}$$

该信号可看成是振幅按实指数信号规律变化的周期性复指数信号。它的实部与虚部都是振幅呈实指数规律变化的正弦振荡。

$$x(t) = |C| e^{j\theta} e^{rt} e^{j\omega_0 t} = |C| e^{rt} e^{j(\omega_0 t + \theta)}$$

$$= |C| e^{rt} [\cos(\omega_0 t + \theta) + j \sin(\omega_0 t + \theta)]$$



□ 离散时间指数与正弦信号

$$x[n] = C\alpha^n$$

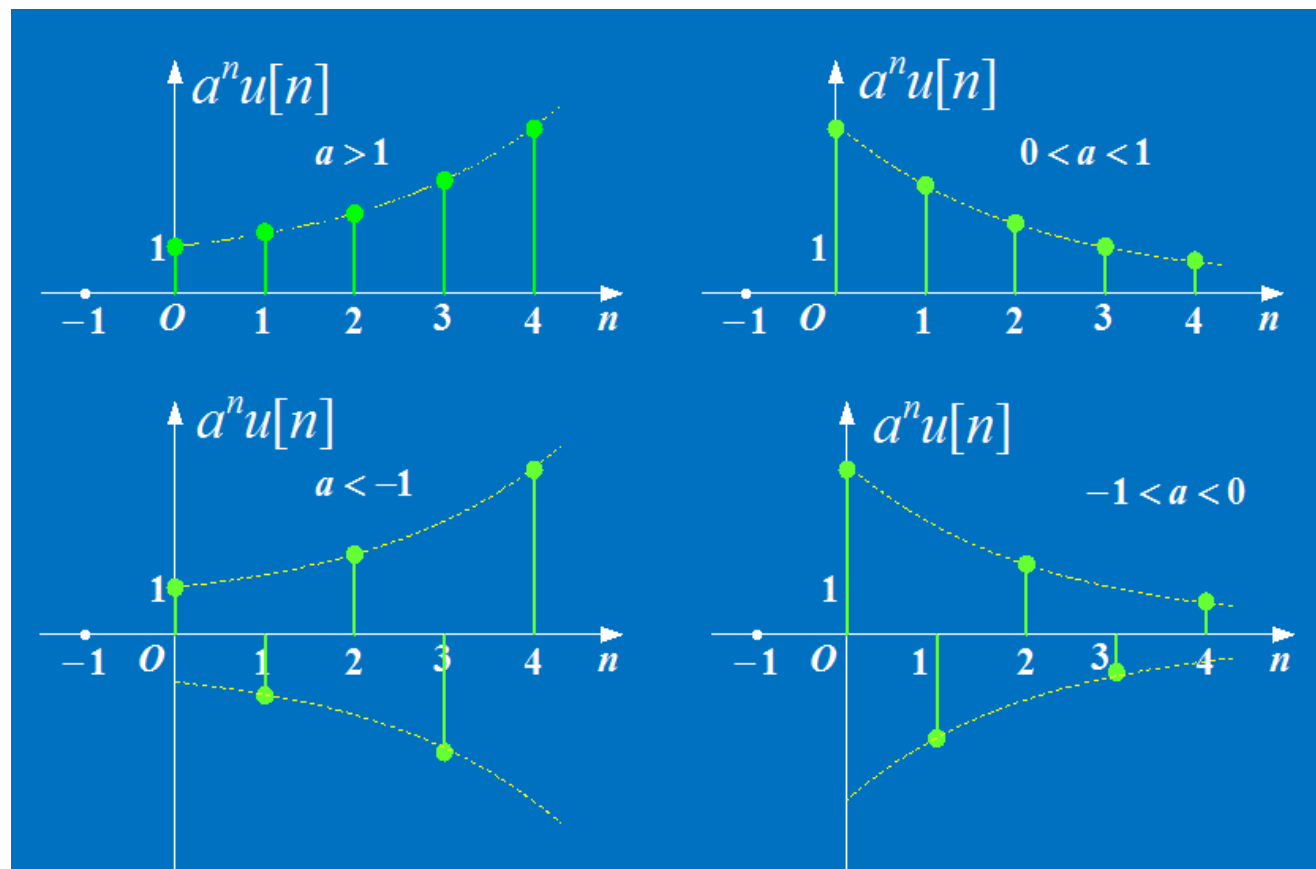
1. 实指数信号: C, α 均为实数

当 $\alpha > 1$ 时, 呈单调指数增长

$0 < \alpha < 1$ 时, 呈单调指数衰减

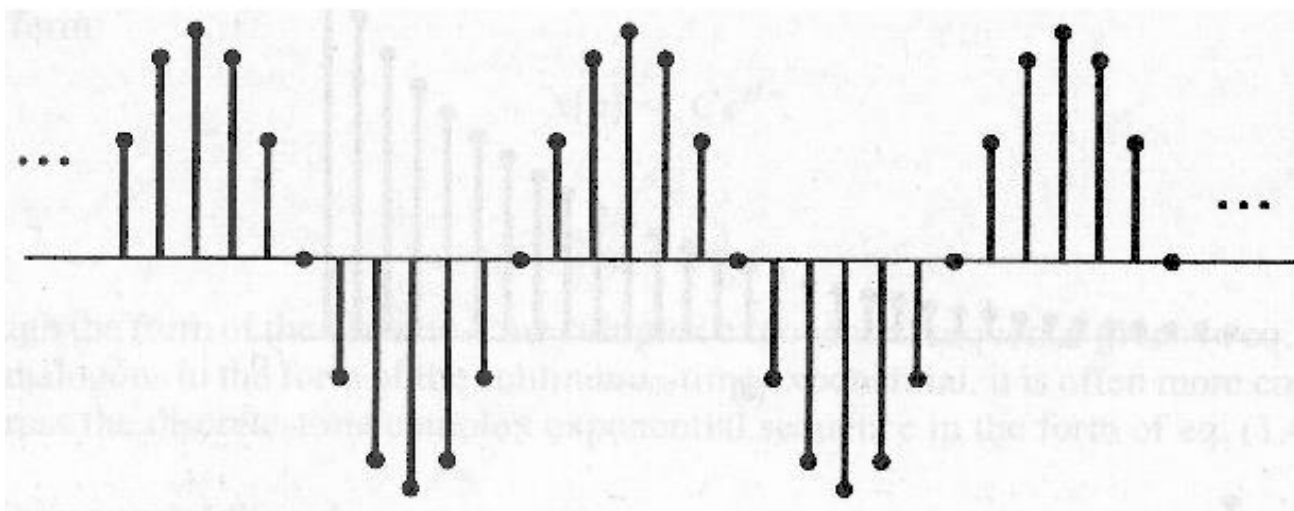
$-1 < \alpha < 0$ 时, 呈摆动指数衰减

$\alpha < -1$ 时, 呈摆动指数增长



2. 正弦信号:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n$$



离散时间正弦信号不一定是周期的，这是与连续时间正弦信号的重大区别。

3. 一般复指数信号:

$$x[n] = C \alpha^n$$

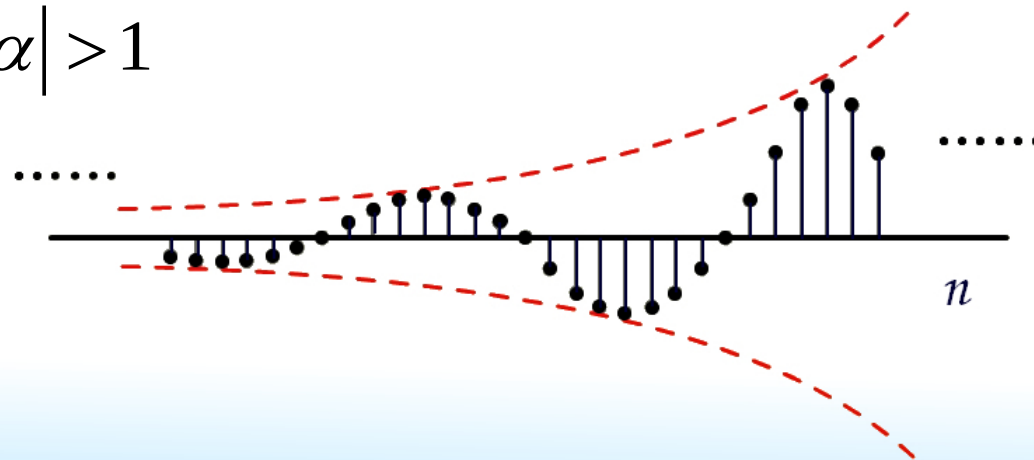
$$C = |C| e^{j\theta} \quad \alpha = |\alpha| e^{j\omega_0}$$

$$x[n] = C \alpha^n = |C| |\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \theta)}$$

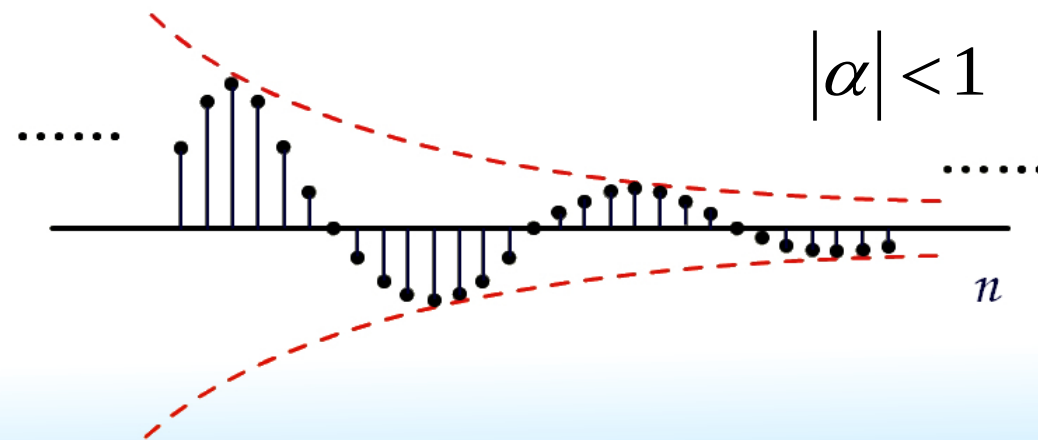
$$= |C| \cdot |\alpha|^n \cdot [\cos(\omega_0 n + \theta) + j \sin(\omega_0 n + \theta)]$$

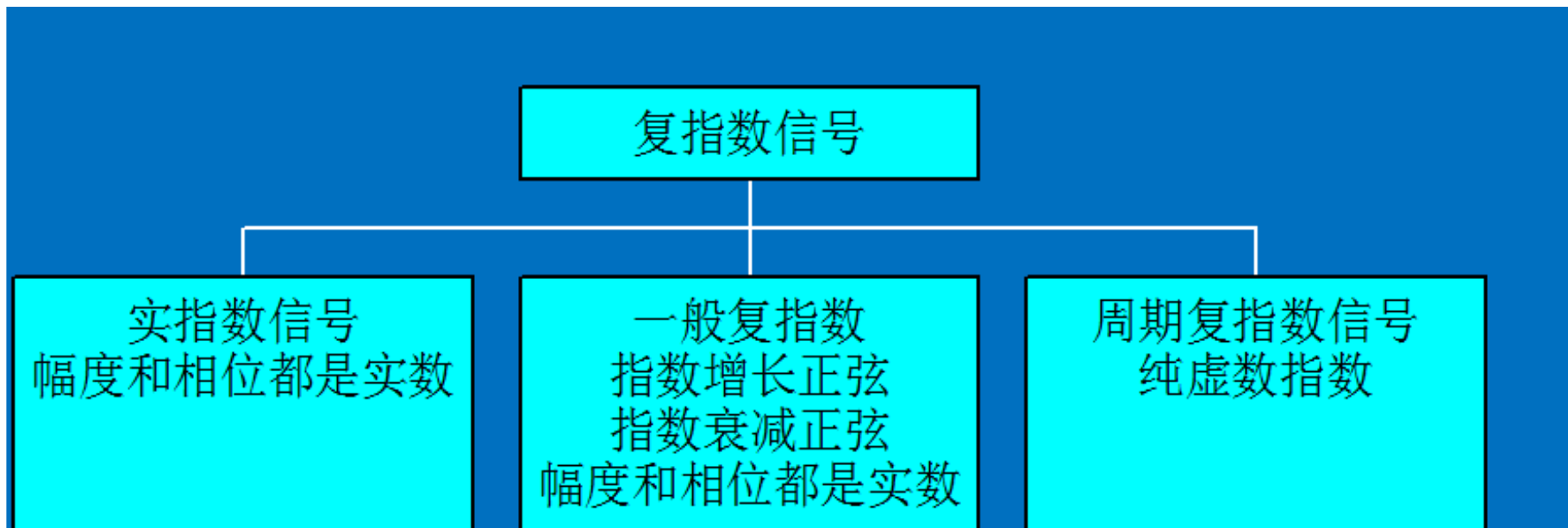
其实部与虚部都是幅度按实指数规律变化的正弦序列。

$$|\alpha| > 1$$



$$|\alpha| < 1$$





□ 离散时间复指数序列的周期性质

离散时间复指数序列 $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ 不一定是周期性的，要具有周期性，必须具备一定条件。

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} \cdot e^{j\omega_0 N} = e^{j\omega_0 n}$$

即 $\omega_0 N = 2\pi m \quad \therefore e^{j\omega_0 N} = 1$

于是有

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{m}$$

表明只有在 ω_0 与 2π 的比值是一个有理数时， $e^{j\omega_0 n}$ 才具有周期性。

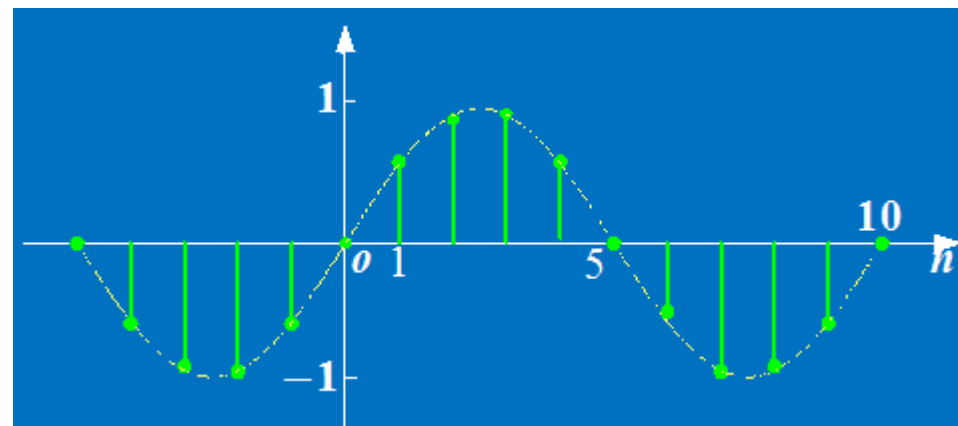
① $\frac{2\pi}{\omega_0} = N$, N 是正整数

$$\sin[\omega_0(n+N)] = \sin\left[\omega_0\left(n + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right] = \sin(\omega_0 n + 2\pi) = \sin(\omega_0 n)$$

正弦序列是周期的

$$x[n] = \sin[0.2\pi n]$$

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = 10 \quad N=10$$



② $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{m}$, $\frac{N}{m}$ 为有理数

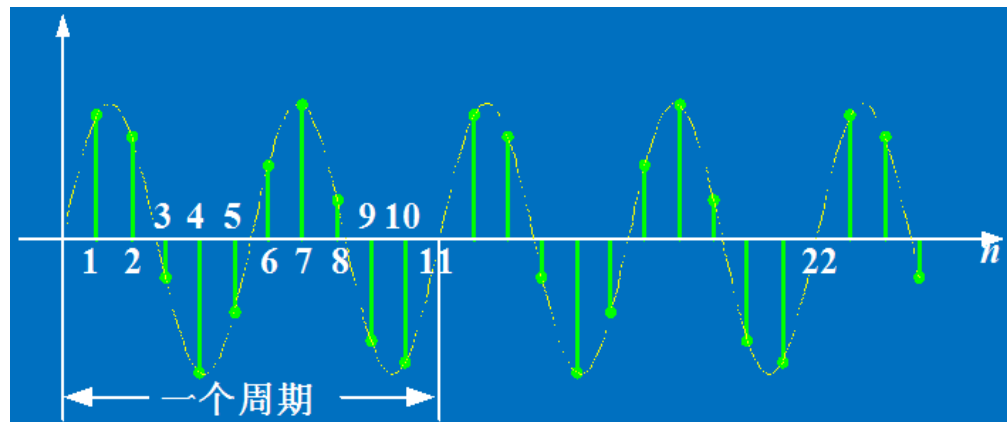
$$\sin[\omega_0(n+N)] = \sin\left[\omega_0\left(n+m\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right] = \sin(\omega_0 n + m \cdot 2\pi) = \sin(\omega_0 n)$$

$\sin(\omega_0 n)$ 仍为周期的 周期: $N = m \frac{2\pi}{\omega_0}$

已知: $\sin \frac{4\pi}{11} n$, 求其周期。

$$\omega_0 = \frac{4\pi}{11}, \text{ 则有: } \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \frac{11}{4\pi} = \frac{11}{2} = \frac{N}{m}$$

所以 $N=11$, 即周期为11。 (2π 中有5.5个 ω_0)

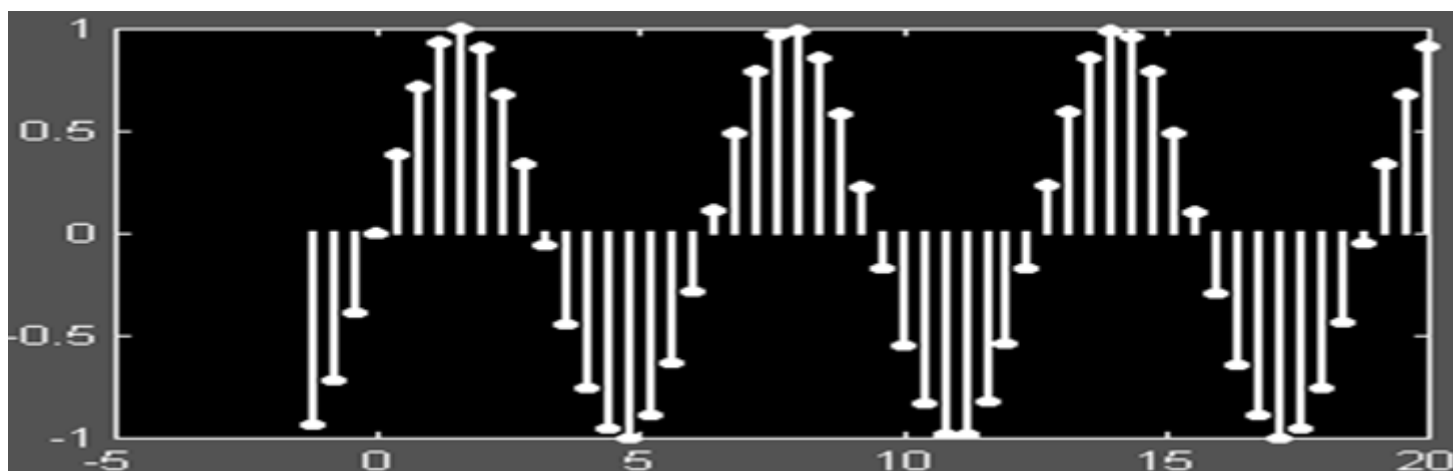


③ $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数

找不到满足 $x[n+N] = x[n]$ 的 N 值，为非周期的

信号 $x(n) = \sin(0.4n)$ 是否为周期信号？

$\omega_0 = 0.4$ $\frac{2\pi}{\omega_0} = 5\pi$ 是无理数 所以为非周期的序列



练习：

判断下列信号是否为周期信号？若是周期信号，则周期为多大？

1、 $x[n] = \cos(8\pi n / 7 + 2)$

2、 $x[n] = e^{j(n/8 + \pi)}$

3、 $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta[n - 3m] - \delta[n - 1 - 3m]\}$

$$x[n] = \cos(8\pi n / 7 + 2)$$

$$1) \quad \because x[n+N] = \cos[8\pi(n+N)/7 + 2] = \cos(8\pi n / 7 + 2 + 8\pi N / 7)$$

$$\text{若 } \frac{8\pi}{7}N = 2\pi m \quad \text{则 } x[n] \text{ 为周期信号, 即 } \frac{N}{m} = \frac{2\pi}{8\pi / 7} = \frac{7}{4}$$

$$\text{所以 } N = \frac{2\pi \times 7}{8\pi} m = \frac{7}{4} m$$

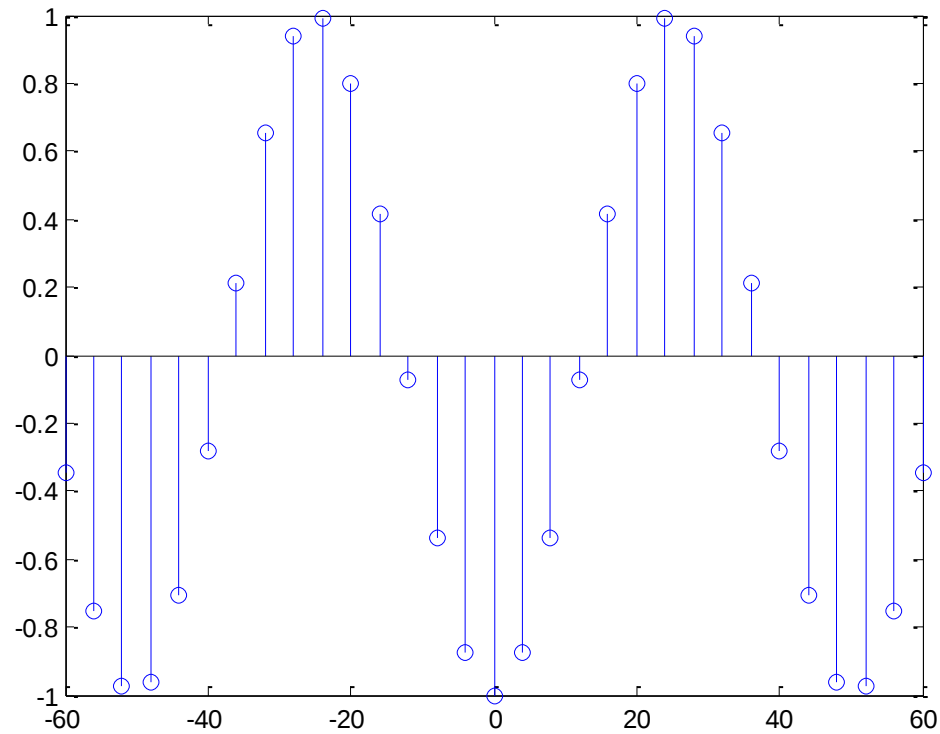
$$\text{得 } m = 4 \quad N = 7 \quad \text{——是周期信号}$$

$$x[n] = e^{j(n/8+\pi)}$$

$$\because x[n+N] = e^{j[(n+N)/8+\pi]} = e^{j(n/8+\pi)} e^{jN/8}$$

若 $N/8 = 2\pi m$, 则 $e^{jN/8} = e^{j2\pi m} = 1$, $x[n]$ 为周期信号。

得 $N = 16\pi m$, $\frac{N}{m} = 16\pi$ ——不是有理数。所以是非周期



```
n=-60:4:60;  
x=cos(n/8+pi);  
stem(n,x);
```

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-3m] - \delta[n-1-3m]\}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \because x[n+3k] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta[n+3k-3m] - \delta[n+3k-1-3m]\} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-3(m-k)] - \delta[n-1-3(m-k)]\} \end{aligned}$$

$$\text{改变求和范围得} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-3m] - \delta[n-1-3m]\} = x[n]$$

所以，是周期信号； $T = 3$

例: 求如下信号的基波周期 $x[n] = e^{j(2\pi/3)n} + e^{j(3\pi/4)n}$

解: $x_1[n] = e^{j(2\pi/3)n}$

$\downarrow$
 $\omega_1 = 2\pi/3$

$$N_1 = m \frac{2\pi}{2\pi/3} = 3m$$

$$x_2[n] = e^{j(3\pi/4)n}$$

$\downarrow$
 $\omega_2 = 3\pi/4$

$$N_2 = m \frac{2\pi}{3\pi/4} = \frac{8}{3}m$$

是有理数——是周期的

$x_1[n]$ 的基波周期为3. $x_2[n]$ 的基波周期8。其**最小公倍数**为24, 即 $x[n]$ 的基波周期为 $N_0 = 24$ 。

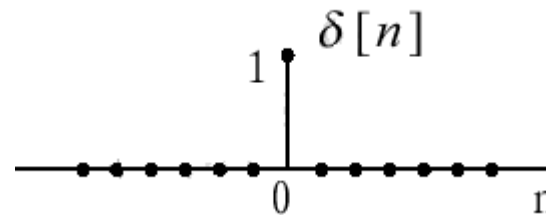
$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
ω_0 不同, 信号也不同	频率相差 2π 的整数, 信号相同
对任何 ω_0 值都是周期的	仅当 $\omega_0 / 2\pi = m / N$ 为有理数时才是周期的。这里 N 和 m 均为整数
基波频率为 ω_0	基波频率为 $(\omega_0 / m) = 2\pi / N$
基波周期: $\omega_0 = 0$, 无定义 $\omega_0 \neq 0, T = 2\pi / \omega_0$	基波周期: $\omega_0 = 0$, 无定义 $\omega_0 \neq 0, N = m(2\pi / \omega_0)$

单位冲激与单位阶跃函数

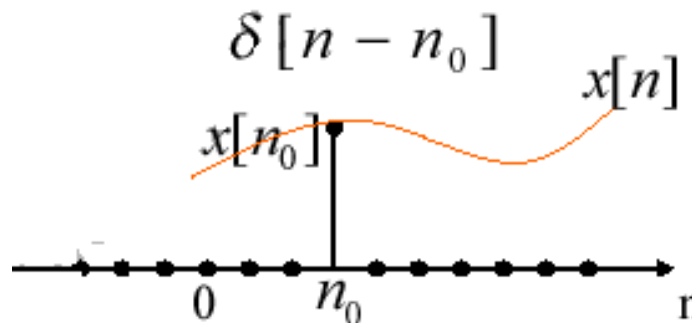
□1.6.1 离散时间单位脉冲和单位阶跃序列

1. 单位脉冲序列

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$



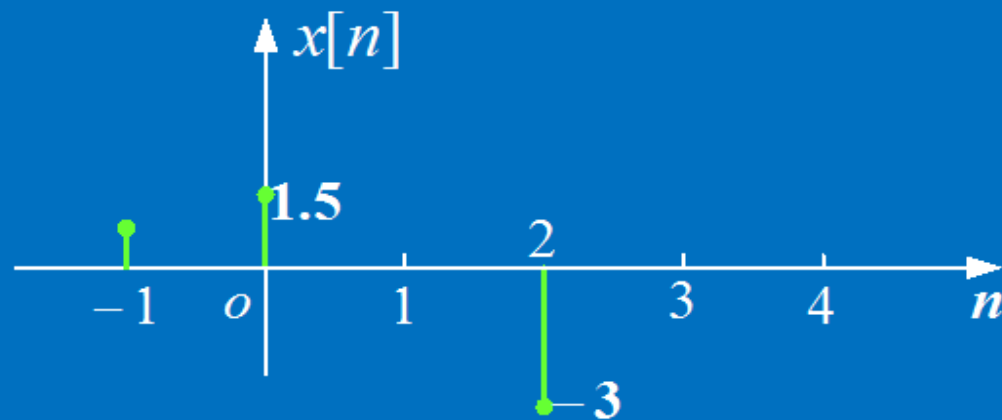
$$x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]\delta[n - n_0]$$



$\delta[n]$ 有提取信号
中某一点的样值的
作用。

采用单位脉冲序列表示任意序列

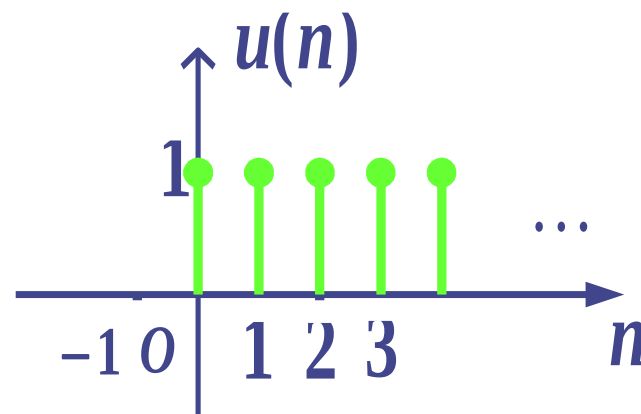
$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$$



$$x[n] = \left\{ 1, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1.5}, 0, -3, 0, 0, \right\} = \delta[n+1] + 1.5\delta[n] - 3\delta[n-2]$$

2. 单位阶跃序列

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$



3. 单位脉冲序列与单位阶跃序列之间关系

(1) 单位脉冲是单位阶跃信号的一次差分

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

(2) 离散单位阶跃是离散单位脉冲的求和函数

$$u(n) = \sum_{k=0}^n \delta(n-k) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \cdots$$

令 $n-k=m$, 代入此式可得
$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^n \delta(m) \quad (1.66)$$

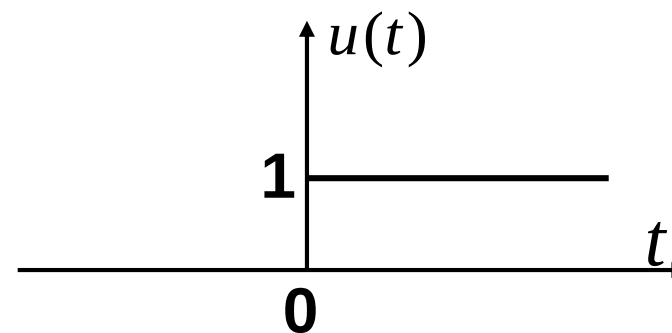


$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \xrightarrow{k = n - m} u[n] = \sum_{k=-\infty}^0 \delta[n - k] \quad \boxed{u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k]}$$

□ 连续时间单位阶跃和单位冲激函数

1. 单位阶跃 $u(t)$

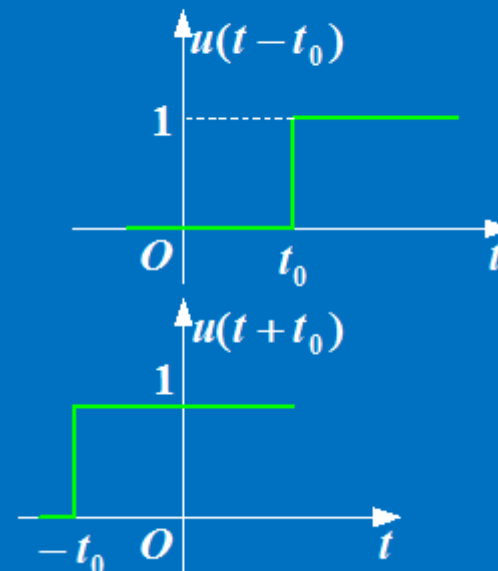
$$u(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$



有延迟的单位阶跃信号

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}, \quad t_0 > 0$$

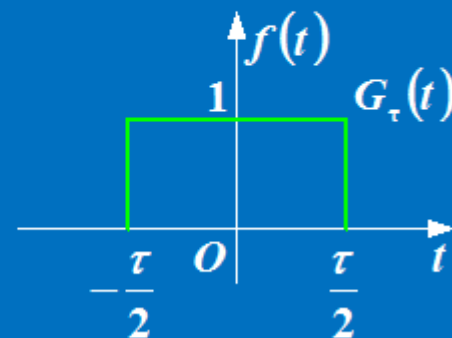
$$u(t + t_0) = \begin{cases} 0 & t < -t_0 \\ 1 & t > -t_0 \end{cases}, \quad t_0 > 0$$



用单位阶跃信号描述其他信号

门函数：也称窗函数

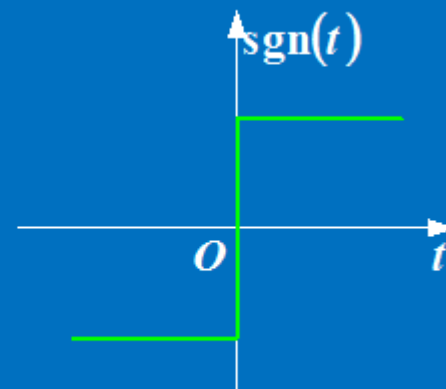
$$g_{\tau}(t) = u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})$$



其他函数只要用门函数处理(乘以门函数)，就只剩下门内的部分。

符号函数：(Signum)

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



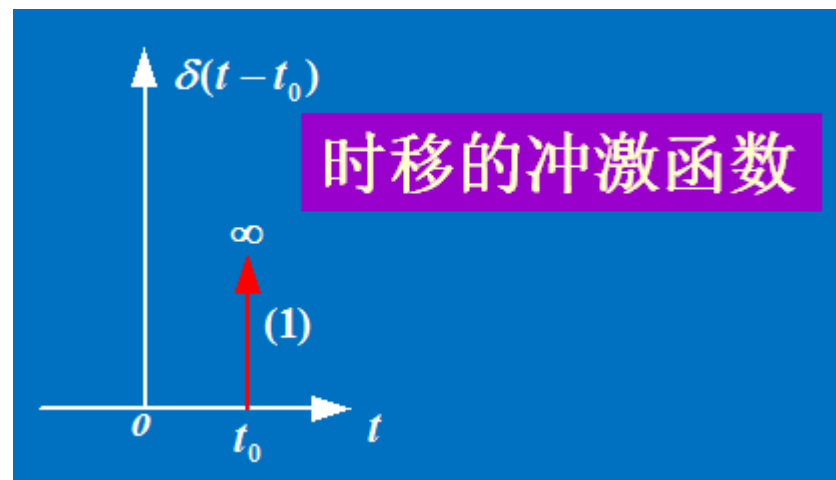
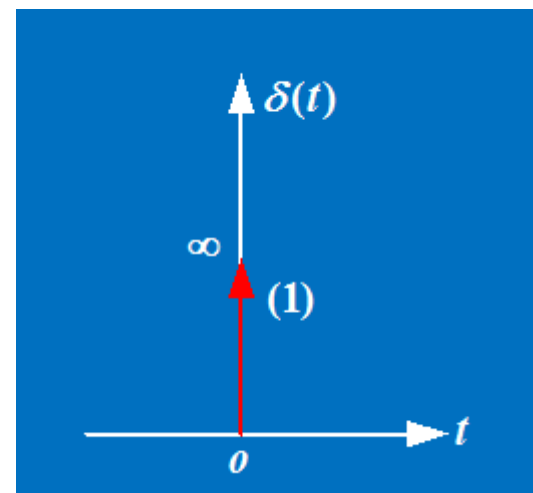
$$\text{sgn}(t) = -u(-t) + u(t) = 2u(t) - 1 \quad u(t) = \frac{1}{2}[\text{sgn}(t) + 1]$$

2. 单位冲激函数 $\delta(t)$

定义1：狄拉克 (Dirac) 函数

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad (t \neq 0) \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt$$

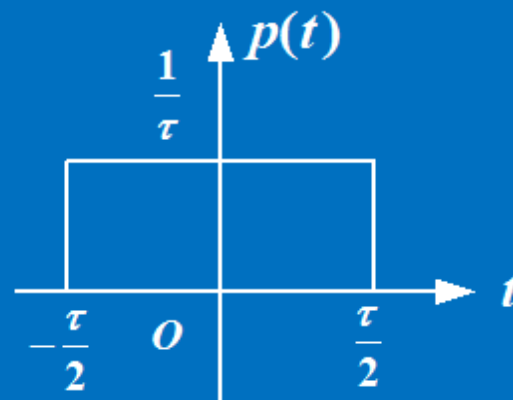
- 函数值只在 $t=0$ 时不为零；
- 积分面积为1；
- $t=0$ 时, $\delta(t) \rightarrow \infty$, 为无界函数。



定义2

$$p(t) = \frac{1}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

$$\tau \rightarrow 0$$



面积1不变；脉宽↓； 脉冲高度↑；

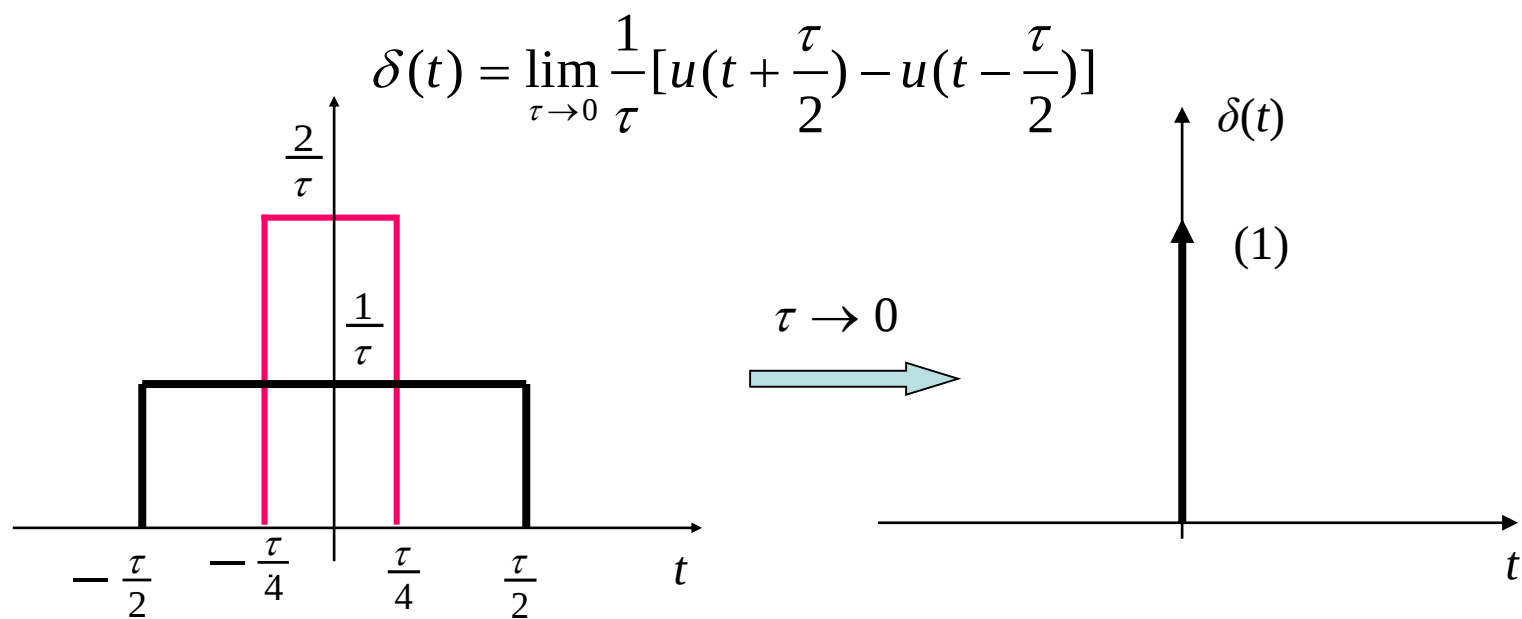
则窄脉冲集中于 $t=0$ 处。

三个特点：

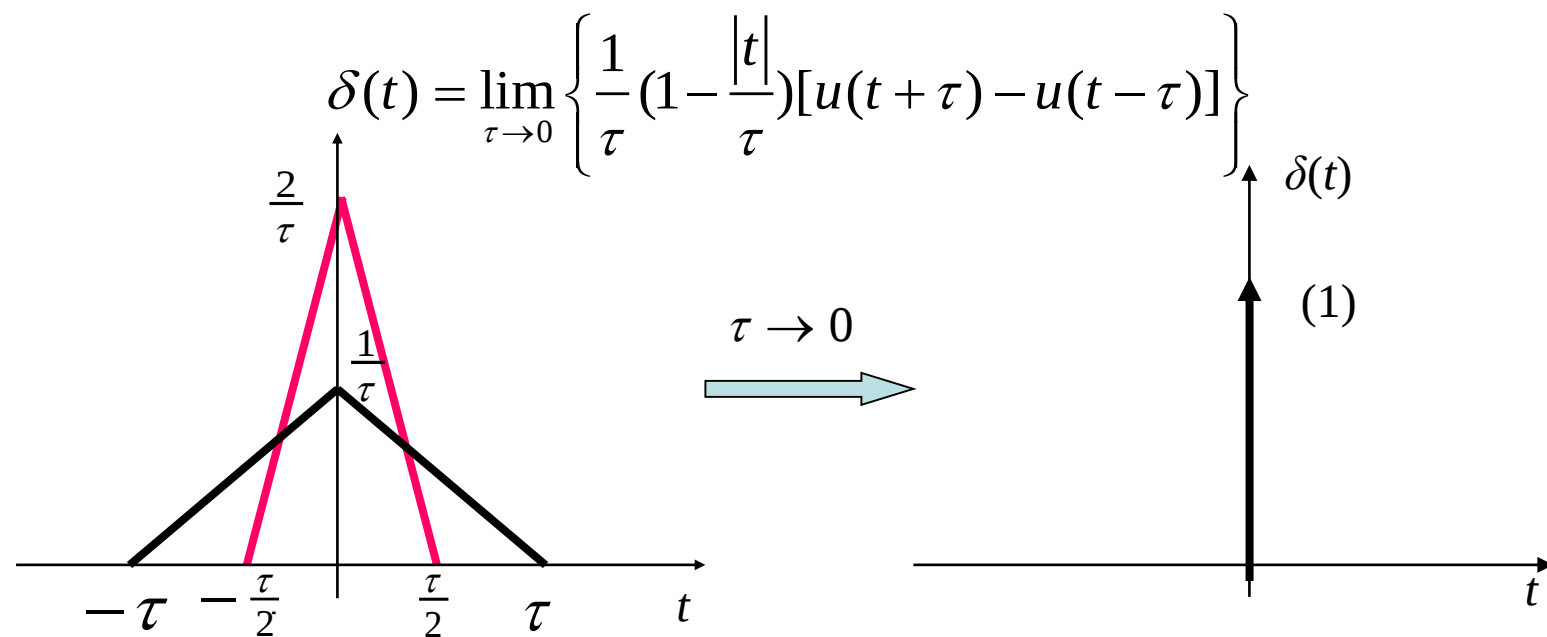
- ★ 面积为1
- ★ 宽度为0
- ★ 幅度 $\begin{cases} \text{无穷} & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$

三角形脉冲、双边指数脉冲、钟形脉冲、抽样函数取 $\tau \rightarrow 0$ 极限，都可以认为是冲激函数。

单位冲激-矩形脉冲极限定义



单位冲激-三角脉冲极限定义



冲激函数的性质

为了信号分析的需要，人们构造了 $\delta(t)$ 函数，它属于广义函数。就时间 t 而言， $\delta(t)$ 可以当作时域连续信号处理，因为它符合时域连续信号运算的某些规则。但由于 $\delta(t)$ 是一个广义函数，它有一些特殊的性质。

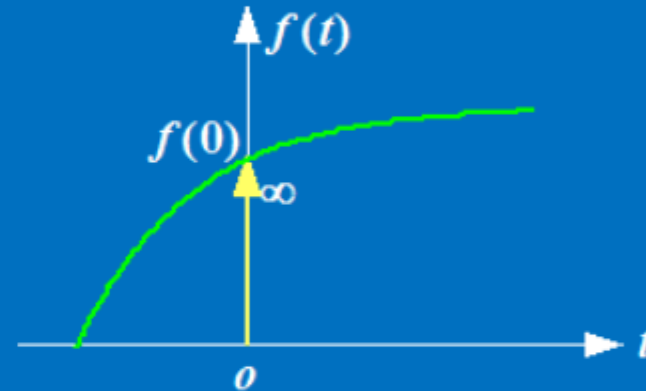
1. 抽样性
2. 奇偶性
3. 冲激偶
4. 标度变换

1. 抽样性(筛选性)

如果 $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续, 且处处有界, 则有

$$\delta(t)f(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0)$$



对于移位情况:

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

2. 奇偶性

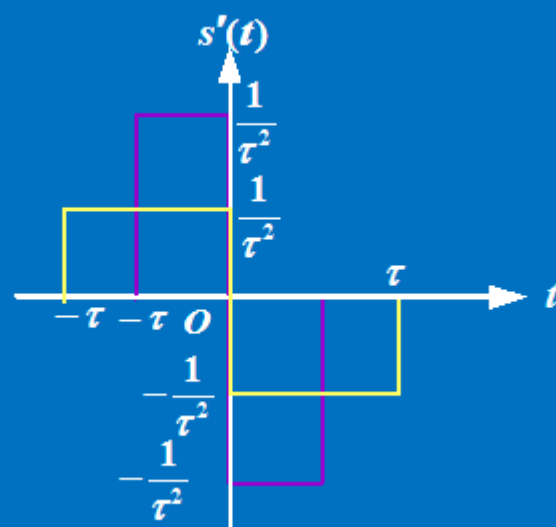
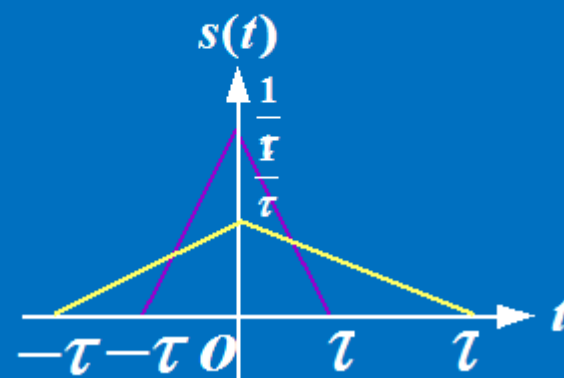
$$\delta(t) = \delta(-t)$$

证明

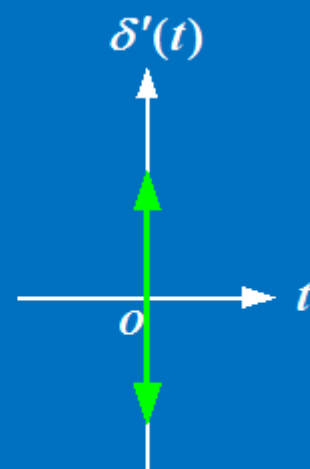
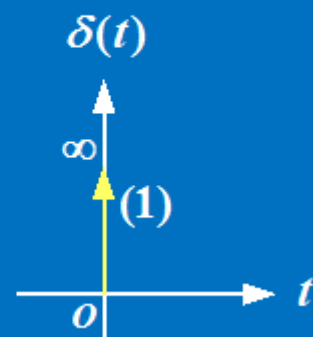
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(-t)dt & \stackrel{\tau=-t}{=} \int_{\infty}^{-\infty} f(-\tau)\delta(\tau)(-d\tau) \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} f(-\tau)\delta(\tau)(d\tau) \\ & = f(0)\end{aligned}$$

3. 冲激偶



$\tau \rightarrow 0$



冲激偶的性质

$$\textcircled{1} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t) dt = -f'(0)$$

对 $\delta(t)$ 的 k 阶导数:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(t) f(t) dt = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

时移, 则:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t - t_0) f(t) dt = -f'(t_0)$$

$$\textcircled{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0, \int_{-\infty}^t \delta'(t) dt = \delta(t)$$

$$\textcircled{3} \delta'(-t) = -\delta'(t), \delta'(t_0 - t) = -\delta'(t - t_0)$$

所以 $\delta'(t)$ 是奇函数

$$\textcircled{4} f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

注意: 与 $\delta(t)f(t) = f(0)\delta(t)$ 不同

4. 对 $\delta(t)$ 的标度变换

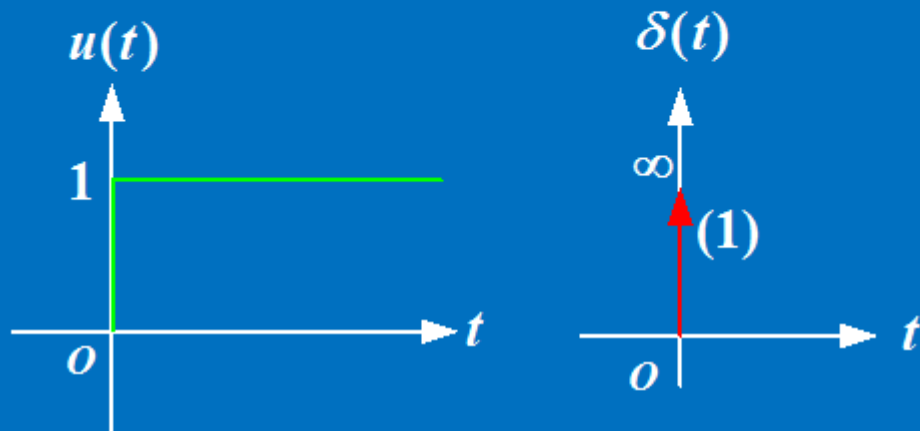
$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

冲激偶的标度变换

$$\delta'(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a} \delta'(t)$$

$$\delta^{(k)}(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a^k} \delta^{(k)}(t)$$

总结： $u(t)$, $\delta(t)$ 之间的关系



求导
 $u(t)$
 $\downarrow \uparrow$
 $\delta(t)$
积分

冲激函数的性质总结

(1) 抽样性

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0)$$

(2) 奇偶性

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

(3) 比例性

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

(4) 微积分性质

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

(5) 冲激偶

$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^t \delta'(t) dt = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t) dt = -f'(0)$$

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

(6) 卷积性质

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

练习：计算下列各式的值：

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t) \delta(t - \frac{\pi}{4}) dt$$

$$(2) \int_{-2}^3 e^{-5t} \delta(t - 1) dt$$

$$(3) \int_{-4}^6 e^{-2t} \delta(t + 8) dt$$

$$(4) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \delta(2 - 2t) dt$$

$$(5) \int_{-2}^2 (t^2 + 3t) \delta(\frac{t}{3} - 1) dt$$

$$(6) (t^3 + 2t^2 + 3) \delta(t - 2)$$

$$(7) e^{-4t} \delta(2 + 2t)$$

$$(8) e^{-2t} u(t) \delta(t + 1)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 2t + 3) \times \frac{1}{2} \delta(t) dt$$

$x(t)$ 的值等于:

A. 2

B. 1.5 ✓

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 6\delta(t) \frac{\sin(2t)}{t} dt = ?$$

A. 6

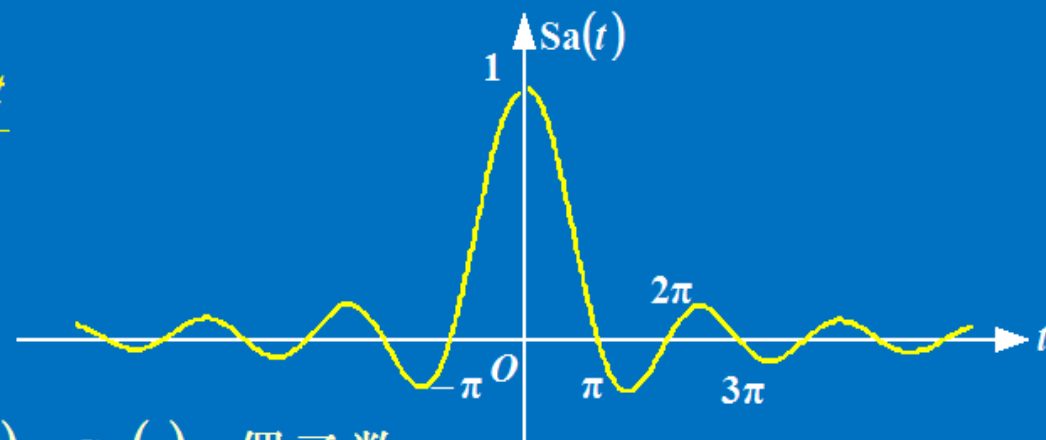
B. 12

$\frac{\sin(2t)}{2t}$
抽样函数

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 6\delta(t) \frac{\sin(2t)}{t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 12\delta(t) \frac{\sin(2t)}{2t} dt \\ &= 12 \end{aligned}$$

抽样信号 (Sampling Signal)

$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$$



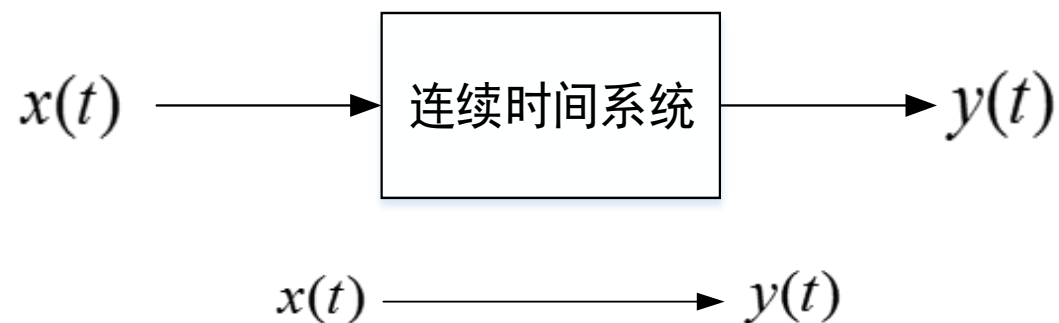
性质

- ① $Sa(-t) = Sa(t)$, 偶函数
- ② $t = 0, Sa(t) = 1$, 即 $\lim_{t \rightarrow 0} Sa(t) = 1$
- ③ $Sa(t) = 0, t = \pm n\pi, n = 1, 2, 3 \dots$
- ④ $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$
- ⑤ $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} Sa(t) = 0$
- ⑥ $\text{sinc}(t) = \sin(\pi t) / (\pi t)$

1.7 连续时间和离散时间系统

1. 连续时间系统

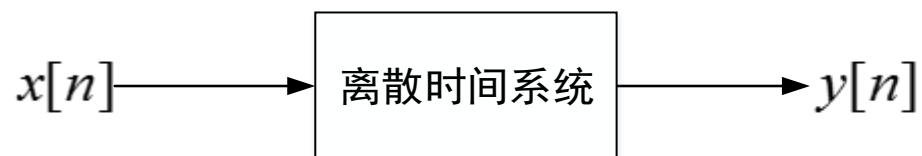
系统的输入和输出是连续时间变量 t 的函数，叫作连续时间系统。输入用 $x(t)$ 表示,输出用 $y(t)$ 表示。



数学工具：微分方程

2. 离散时间系统

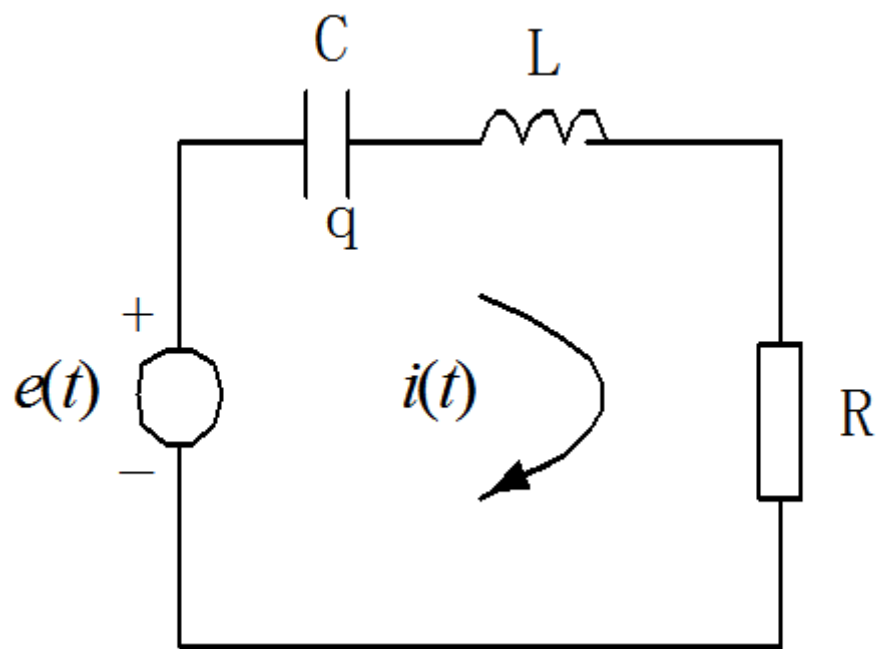
系统的输入和输出是离散时间变量 n 的函数，叫作离散时间系统。输入用 $x[n]$ 表示,输出用 $y[n]$ 表示。



$$x[n] \longrightarrow y[n]$$

数学工具：差分方程

连续时间系统举例：



$$u_c(t) + u_R(t) + u_L(t) = e(t) \quad (1)$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2)$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (3)$$

$$\frac{1}{C} \int i(t) dt + i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} = e(t)$$

两边乘以C并求导：

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{de}{dt}$$

离散时间系统举例：

$y[n]$ 表示第 n 个月贷款余额

$x[n]$ 表示第 n 个月还款金额

r :利率（年化）

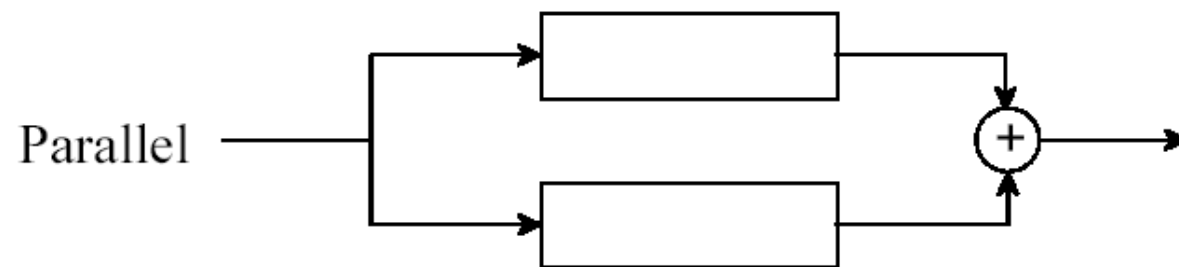
$$y[n] = y[n-1] + \frac{r}{12} y[n-1] - x[n]$$

□ 系统的互联

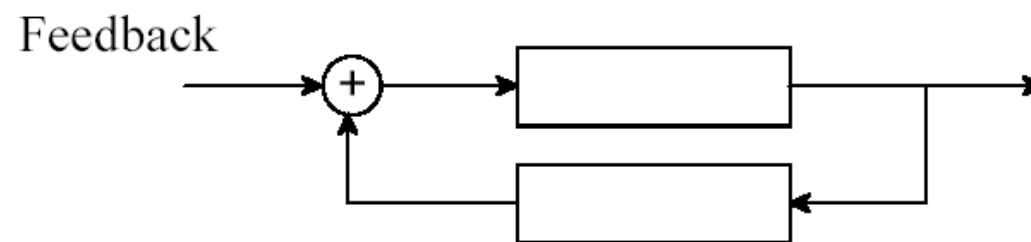
✓ 串联



✓ 并联



✓ 反馈



基本系统性质

□ 记忆系统和无记忆系统

在任何时刻，系统的输出都只与当前时刻的输入有关，而与该时刻以外的输入无关，则称该系统是无记忆系统。否则就是记忆系统

$$y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2$$

$$y(t) = x(t)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$y[n] = x[n-1]$$

$$y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

□ 可逆性与可逆系统

如果一个系统对任何不同的输入都能产生不同的输出,则称该系统是**可逆系统**(invertible systems)

$$y(t) = \frac{1}{2}x(t) \quad y(t) = 2x(t)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad y[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n]$$

$$= y[n-1] + x[n]$$

$$y(t) = x^2(t) \quad \text{不可逆系统}$$

□ 因果性

如果一个系统在任何时刻的输出都只与当时这个时刻的输入以及该时刻以前的输入有关，而和该时刻以后的输入无关就称该系统是**因果的** (causal)。

$$y[n] = x[n-1]$$

$$y(t) = x(t+1)$$

$$y(t) = x(t) \cos(t+1)$$

要把输入信号的影响和其他函数的影响区分来

实际的物理可实现系统均为因果系统

非因果系统的概念与特性也有实际的意义，如信号的压缩、扩展，语音信号处理等。

若信号的自变量不是时间，如位移、距离、亮度等为变量的物理系统中研究因果性显得不很重要。

因果信号

$t = 0$ 接入系统的信号称为因果信号。

表示为：

$$x(t) = x(t)u(t) \quad \text{相当于 } t < 0, x(t) = 0$$

□ 稳定性

如果一个系统当输入有界时，产生的输出也是有界的，则该系统是**稳定系统(stable system)**。否则，就是**不稳定系统(unstable system)**。

稳定性是系统自身的性质之一，系统是否稳定与激励信号的情况无关。

$$|x(t)| \leq M_x \Rightarrow |y(t)| \leq M_y$$

$$y(t) = x(t)u(t), \quad y(t) = tx(t)$$

一个特别的有界输入，是否导致一个无界的输出

□ 时不变性

如果一个系统当输入信号有一个时移时，输出响应也产生同样的时移。除此之外，输出响应无任何其它变化，则称该系统是**时不变的**(time-invariant)。否则就是**时变的**(time-varying)。

$$x(t) \rightarrow y(t), \quad x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$$

认识：

- 电路分析上看：元件的参数值是否随时间而变
- 从方程看：系数是否随时间而变

□ 时不变性

$$y(t) = x(-t)$$

当 $x(t) = x_1(t)$ 时, $y_1(t) = x_1(-t)$

当 $x(t) = x_2(t)$ 时, $y_2(t) = x_2(-t)$

令 $x_2(t) = x_1(t - t_0)$ 则有: $y_2(t) = x_1(-t - t_0)$

而 $y_1(t - t_0) = x_1[-(t - t_0)] = x_1(t_0 - t) \neq y_2(t)$

该系统是时变的。

$$y(n) = (n+1)x(n)$$

$$y(n) = x(n)$$

判断系统 $y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$ 是否为时不变系统 ?

此系统的作用是展宽输入系统的信号，一切变换都是对 t 而言

$$x(t) \xRightarrow{\text{经系统}, t \rightarrow \frac{t}{2}} x\left(\frac{t}{2}\right) \xRightarrow{\text{时移}, t \rightarrow t_0} x\left(\frac{t-t_0}{2}\right) \quad (1)$$

$$x(t) \xRightarrow{\text{时移}, t \rightarrow t_0} x(t-t_0) \xRightarrow{\text{经系统}, t \rightarrow \frac{t}{2}} x\left(\frac{t}{2}-t_0\right) \quad (2)$$

$(1) \neq (2)$, 为时变系统

□ 线性

1. 可加性 若: $x_1(t) \rightarrow y_1(t), x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

则: $x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$

2. 均匀性(齐次性) 若: $x(t) \rightarrow y(t)$ 则:

$$kx(t) \rightarrow ky(t)$$

若 $x(t) = \sum_k a_k x_k(t)$ 且 $x_k(t) \rightarrow y_k(t)$

则 $y(t) = \sum_k a_k y_k(t)$

----叠加性质

例：设系统为 $y[n] = \Re\{x[n]\}$ ，试判断线性性。

令 $x_1[n] = r[n] + js[n]$ ，是一个任意复输入，响应的输出应为

$$y_1[n] = r[n]$$

现把 $x_1[n]$ 乘以一个复数 $a=j$ ，也即考虑输入为

$$\begin{aligned} x_2[n] &= jx_1[n] = j(r[n] + js[n]) \\ &= -s[n] + jr[n] \end{aligned}$$

对应的输出为 $y_2[n] = \Re\{x_2[n]\} = -s[n]$

即 $y_2[n] \neq jy_1[n]$

练习：

微分方程 $y(t) = x(t) + x(t-2)$ 代表的系统是否是因果系统。

微分方程 $y(t) = x(t) + x(t+2)$ 代表的系统是否是因果系统。

判断下列两个系统是否为非时变系统。

系统1: $y(t) = \cos[x(t)] \quad t > 0$

系统2: $y(t) = x(t) \cdot \cos t \quad t > 0$

考虑一个系统，其输入为 $x[n]$ 与输出 $y[n]$ 的关系由下式定义

$$y[n] = x[2n+1]$$

其中， n 取任意整数。试确定这个系统是否具有线性、时不变性、因果性和稳定性，并给出判定依据。

$$y[n] = x[2n+1], \text{ 设 } x_1[n] \rightarrow y_1[n] = x_1[2n+1], x_2[n] \rightarrow y_2[n] = x_2[2n+1]$$

由 $ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]$ ， a, b 为任意常数，知系统具有线性性。

由 $y[0] = x[1], y[1] = x[3]$ ，知系统是时变、非因果的。

对任意有界 $x[n]$ ， $y[n] = x[2n+1]$ 必有界，故系统是 BIBO 稳定系统。

一 LTI 系统，如图 1 所示，系统输入为 $x_1(t)$ 时，系统输出为 $y_1(t)$ 。画出对应系统输入 $x(t)$ 如图 1 中所示波形时的系统输出 $y(t)$ 的波形。

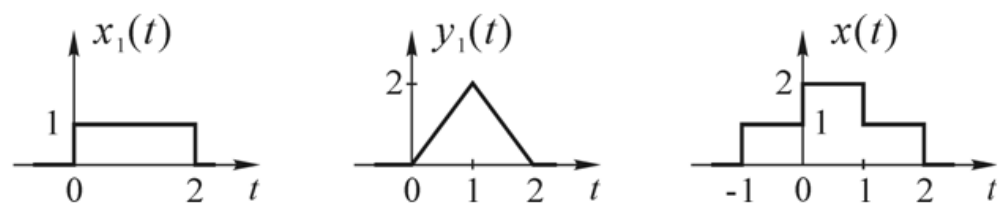
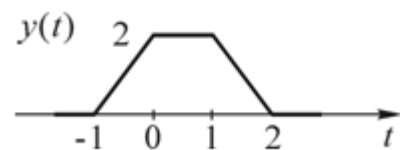


图 1

由 $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ 及系统 LTI 特性，有： $x(t) = x_1(t+1) + x_1(t) \rightarrow y(t) = y_1(t+1) + y_1(t)$



小 结

□ 需要掌握内容

- ✓ 自变量的变换
- ✓ 基本信号的性质（指数信号）
- ✓ 单位脉冲（冲激）和单位阶跃信号
- ✓ 基本系统的性质以及判别